Lect. univ. dr.
Carmen Judith GRIGORESCU

Conf. univ. dr.
Grațiela GHIC

MODELAREA DECIZIEI FINANCIARE

- Manual de studiu individual -

Lect. univ. dr.
Carmen Judith GRIGORESCU

Conf. univ. dr.
Grațiela GHIC

MODELAREA DECIZIEI FINANCIARE

- Manual de studiu individual -

PRO UNIVERSITARIA
BUCUREȘTI
2012

ISBN 978-606-647-325-5

CUPRINS

INTRODUCERE

Disciplina ***"Modelarea deciziei financiare"***este înscrisă în planul de învăţământ în cadrul disciplinelor cucaracter teoretico-aplicativ **şi** are drept scop rezolvarea problemelor specifice acestui domeniu. Deciziile financiare sunt caracterizate de o raţionalitate limitată, de lipsa de informaţie completă a decidentului ceea ce semnifică faptul că modelarea deciziilor ar trebui să se realizeze cu scopul unei mai bune informări. Modul în care omul „descoperă" cunoaşterea şi raţionează în obţinerea informaţiei reprezintă punctul de plecare în modelarea oricărei decizii.

Obiectivele cursului

Ca principal obiectiv disciplina ***"Modelarea deciziei financiare"*** îşi propune să studieze procedeele, tehnicile şi metodele specifice de modelare a deciziilor financiare, precum şi analiza şi interpretarea rezultatelor obţinute. De asemenea, disciplina urmăreste înţelegerea procedeelor aplicate, deprinderea abilităţilor de lucru cu soft specializat, precum şi aplicarea în practică, prin studii de caz rezolvate şi propuse, a metodelor de învăţare.

Competenţe conferite

După parcurgerea acestui curs, studentul va dobândi următoarele competenţe specifice:

Competenţe specifice

1. Cunoaştere şi înţelegere

Cunoaşterea şi utilizarea adecvată a noţiunilor specifice disciplinei, explicarea şi interpretarea unor concepte şi idei specifice acesteia, precum şi proiecte teoretice şi/sau practice de aplicare a noţiunilor specifice.

2. Explicare şi interpretare

- explicarea şi interpretarea diverselor rezultate obtinute în urma modelarii deciziilor financiare;
- estimarea corectă a tuturor parametrilor modelului;
- validarea modelului prin verificarea tuturor ipotezelor statistice emise.

3. Instrumental – aplicative

- cursurile sunt predate în mod interactiv;
- în cadrul orelor de seminar, se vor efectua împreuna cu studentii ample studii de caz, utlizând un soft specific estimărilor econometrice EViews;
- sunt utilizate, de asemenea, teste grila de evaluare.

4. Atitudinale

- formarea unei atitudini responsabile faţă de situaţiile în care se modeleaza deciziilor financiare în cadrul economiei naţionale

Resurse şi mijloace de lucru

Cursul dispune de manual scris, supus studiului individual al studenţilor, precum şi de material publicat pe Internet sub formă de sinteze, teste de autoevaluare, studii de caz, aplicaţii, necesare întregirii cunoştinţelor practice şi teoretice în domeniul studiat. În timpul convocărilor, în prezentarea cursului sunt folosite echipamente audio-vizuale, metode interactive şi participative de antrenare a studenţilor pentru conceptualizarea şi vizualizarea practică a noţiunilor predate.

Structura cursului

Cursul este compus din 6 unităţi de învăţare:

Unitatea de învăţare 1. **Modelarea proceselor economice. Modelarea economico-matematică. Teoria optimizării**

Unitatea de învăţare 2. **Analiza economico-matematică a unor modele liniare**

Unitatea de învățare 3. **Aplicații ale programării matematice în fundamentarea deciziilor optime**

Unitatea de învățare 4. **Gestiunea optimă a stocurilor**

Unitatea de învățare 5. **Modelarea deciziei de investiție, componentă principală a deciziilor financiare**

Unitatea de învățare 6. **Metode multicriteriale pentru fundamentarea deciziei de investiții în condiții de certitudine**

Unitatea de învățare 1

Modelarea proceselor economice.Modelarea economico-matematică. Teoria optimizării

1.1. Introducere

Datorită caracterului din ce în ce mai complex al fenomenelor economico-sociale din ultimele decenii precum şi datorită multitudinii formelor de manifestare a acestora face imposibilă luarea unor decizii corecte bazate doar pe experiența managerială, oricât de vastă ar fi aceasta. În prezent studiul fenomenelor economico-sociale necesită modalități de abordare precum şi instrumente de cercetare variate şi de foarte multe ori sofisticate. Există cazuri, relativ simple, în care luarea unor decizii bine fundamentate nu necesită o analiză deosebită, însă în prezent, activitățile de conducere economică, administrativă, politică, tehnologică etc. nu pot fi concepute fără rezolvarea unor probleme importante de decizii economice optime. Se poate afirma că procesul de optimizare a deciziilor financiare constă în alegerea unei anumite variante, din mai multre posibile, ataşate unui anumit fenomen sau proces economic.

1.2. Obiectivele şi competențele unității de învățare

Obiectivele unității de învățare:

- scopul acestei unități de învățare este acela de a-i familiariza pe studenții economişti cu metodologia modelării activității firmei, prin prezentarea unora dintre cele mai importante şi utile modele la nivel de întreprindere: modele de producție, modele de distribuție, modele de stabilire a prețului, modele de gestiune a resurselor umane, modele de gestiune financiară, modele decizionale;
- cunoaşterea metodelor specifice modelării economico-financiare;
- fundamentarea corectă a deciziei financiare.

Competențele unității de învățare:

- cunoaşterea şi utilizarea adecvată a noțiunilor specifice disciplinei, explicarea şi interpretarea unor concepte şi idei specifice acesteia, precum şi proiecte teoretice şi/sau practice de aplicare a noțiunilor specifice;
- explicarea şi interpretarea diverselor rezultate obtinute în urma modelarii deciziilor financiare;
- estimarea corectă a tuturor parametrilor modelului;
- validarea modelului prin verificarea tuturor ipotezelor statistice emise;
- deprinderea tehnicilor de construire a modelelor şi a abilității de utilizare a lor la rezolvarea diferitelor probleme cu care se confruntă firma sunt pe cât de utile, pe atât de necesare economiştilor şi în special economiştilor informaticieni, al căror rol principal constă în asigurarea unui grad din ce în ce mai mare de informatizare a activității firme.

1.3. Conținutul unității de învățare

1.3.1.Metoda Cercetării Operaționale

Cercetarea Operațională ca ″Aplicarea metodelor ştiințifice pentru analizarea şi soluționarea problemelor de decizie managerială″[1].

Pentru a se putea lua decizii fundamentate pe baza unor astfel de indicatori, Cercetarea Operațională studiază obiectul supus atenției, în toată complexitatea lui şi mai ales legăturile şi interdependențele prin care se caracterizează fenomenul complex.

Principalele caracteristici sunt:

- se concentrează în principal asupra procesului de luare a deciziilor;
- fundamentează ştiințific deciziile manageriale;
- examinează situațiile decizionale dintr-o perspectivă cuprinzătoare;
- utilizează metode şi cunoştințe din multe discipline;
- constituie un suport pentru modelele matematice;
- permite folosirea calculatoarelor electronice.

Particularitățile care concretizează acțiunea de cercetare operațională privesc astfel, strategia procesului decizional.

Metodologic foarte complex, cercetarea operațională poate răspunde unui câmp larg de probleme ale practicii economice: planificarea operativă şi de perspectivă, repartiția optimă a investițiilor, prognoza progresului tehnic şi a creşterii economice etc.

[1] Comitetul de Cercetare Operationala a Consiliului National de Cercetare a Marii Britanii

Desfăşurarea etapelor cercetării
Din lucrarea fundamentală a lui C. W. Churchman, R.L.Ackoff, desfăşurarea unei cercetări operaționale trebuie să parcurgă şase etape, după cum urmează:
1)**Formularea problemei** - presupune stabilirea comportamentului eficient într-un anumit scop în funcție de obiectivele urmărite de beneficiarul cercetării; eficiența trebuie să se exprime în termeni comensurabili, iar aplicabilitatea modului de comportare să fie testată;
2)**Proiectarea unui model matematic** pentru sistemul ce formează obiectul cercetării.
Modelul oglindeşte eficiența ca funcție de mai multe variabile, din care cel puțin una este influențabilă şi este dat, în formă generală de relația:
$Z=f(x_i , y_i)$
unde
Z - eficiența sistemului ;
x_i – variabilele influențabile ;
y_i –variabilele neinfluențabile .
3) **Determinarea unei soluții optime** prin metode matematice analitice sau prin soluțiile numerice ale modelului.
4)**Testarea** modelului şi a soluției.
Aceasta constituie etapa în care se examinează care din rezultatele obținute prin calcule sunt valabile şi care nu mai corespund.
5) **Controlul şi adecvarea soluției**.
Această etapă este necesară întrucât soluția îşi poate păstra valabilitatea doar cu condiția ca variabilele necuprinse în model să-şi conserve valoarea, iar relațiile dintre variabilele cuprinse să rămână egale.
6) **Transpunerea soluției în practică.**
Pentru concretizarea desfăşurării acestor etape, analizăm modul de pregătire a deciziei ce trebuie s-o ia conducerea unei firme cu privire la profilul viitor de producție al acesteia.
Prima etapă porneşte de la definirea cercetării în termeni ştiințifici de către beneficiarul analizei; sunt delimitate elementele asupra cărora va influența decizia (structura producției, investițiile în mijloace fixe, condițiile marginale, durata perioadei de plan, dezvoltarea forței de muncă etc.).
Analiza sistemului vizează:
- structura existentă şi caracteristicile subsistemului condus;
- elementele care pot fi afectate de decizia ce urmează să se ia şi relațiile dintre ele;
- problemele principale cu care se confruntă unitatea şi frecvența lor.

Etapa modelării obiectului cercetării are la bază analiza efectuată, iar pentru cunoaşterea structurii şi conexiunilor din sistem se folosesc modele standardizate sau se construiesc modele noi, potrivit problematicii puse.
Întrucât problematica presupune nişte ipoteze speciale, de exemplu, dimensiunile condițiilor marginale menționate, funcții de producție respectiv relații resurse-rezultate, în dependență de resursele folosite sau relații date de evaluări ale produselor şi ale mijloacelor de producție, sarcina proiectării modelului revine întregii echipe de cercetare (economişti, aparat managerial etc.).
Deducerea din modelarea efectuată a unei soluții optimale necesită

formularea măsurilor operatorii pentru aplicarea soluțiilor şi precizarea influențelor lor asupra domeniului modelat şi a domeniilor adiacente. Din desfăşurarea acestei etape decidentul trebuie să obțină, luând în calcul condițiile marginale: datele optimale ale profilului de producție la sfârşitul perioadei planificate, precum şi influențele ce le poate suporta din partea factorilor care n-au fost luați în considerare la modelare.
Etapa a patra, a testării modelului şi a soluțiilor este destul de dificilă, datorită în principal faptului că soluțiile modelului rămân valabile atâta timp cât se păstrează constanța elementelor şi a relațiilor din sistem necuprinse în model, precum şi a coeficienților cu care s-a lucrat la modelare. De aceea etapa următoare, a controlului, devine o condiție necesară, în orice domeniu de aplicare a cercetării operaționale, inclusiv al planificării.

Fenomene economice modelate matematic
În funcție de natura problemelor ce se ivesc deosebim trei tipuri de fenomene economice pentru care se pot construi modele economico-matematice capabile să ofere decidentului soluții acceptabile în dirijarea fenomenului:
- probleme privind activitățile concurențiale;
- probleme de decizii secvențiale;
- probleme de corelație economică.

a) **Problemele privind activitățile concurențiale** apar în cadrul unităților de producție, cunoscute fiind ca probleme de utilizare eficientă a resurselor limitate cu scopul obținerii unui anumit nivel de producție.
Eficiența sistemului este caracterizată în cadrul modelului economico-matematic de funcția obiectiv a activității globale a sistemului. Aceasta poate fi exprimată ca o condiție de minimizare a unor cheltuieli cerute de realizarea activităților concurențiale sau ca o cerință de maximizare a unor venituri.
În acest sens prezentăm în continuare câteva situații tipice.
➢ Consumuri de resurse care sunt atât de limitate (greu de procurat sau prea costisitoare) încât nu ne interesează numai încadrarea într-un maxim impus mai mult sau mai puțin empiric, ci şi desfăşurarea activității la nivelul minim posibil de consum. În acest context se poate formula, de exemplu, un model economico-matematic în care firmei considerate i se cere realizarea unui anumit nivel al producției în condițiile minimizării consumului total de energie. Acelaşi model, dar având drept criteriu de eficiență maximizarea unuia din indicatorii economici – producție globală, beneficiu etc. – poate conduce la alte soluții optime.
Parametrizând modelul se poate identifica soluția optimă care satisface cerințele impuse de utilizarea diferitelor criterii de eficiență.
Analiza comparativă a diferitelor variante optimale permite decidentului să determine factorii care influențează în mod deosebit valoarea unuia sau altuia dintre criteriile folosite, de la ce prag această influență devine semnificativă.
➢ Realizarea unui maxim de producție fizică. La nivelul firmei apare uneori această problemă indusă în special de necesitatea satisfacerii unor cerințe stabilite fie din interiorul, fie din

exteriorul sistemului. Interesează astfel care este soluția optimă de obținere a acestui maxim şi cu ce consum de resurse se poate realiza acest obiectiv al activității de producție. În aceste condiții se poate analiza efortul economic necesar obținerii unui maxim de producție, pentru a determina astfel care este nivelul de rentabilitate al produsului (activității respective).

- Valoric, se poate solicita minimizarea cheltuielilor (materiale, totale, cu forța de muncă sau numai pentru unul dintre factori).

Pentru a preveni apariția unor discordanțe dintre optimul local şi cel global, ca şi a unor contradicții logice (care dau de obicei mulțimea soluțiilor admisibile vidă), acest tip de modele trebuie să conțină restricții de realizare a unor niveluri minime de producție, mai ales la produsele puternic consumatoare de resurse dar care nu pot fi excluse din planul de producție. Aceste tipuri de modele pot fi corelate unele cu altele, în scopul analizei influenței diferitelor tipuri de consumuri asupra structurilor optime de producție (la un nivel impus al obiectivelor obligatorii de realizat).

- Realizarea unui maxim al producției exercițiului, al cifrei de afaceri etc.

Utilizarea producției exercițiului în calitate de criteriu de optimizare conduce la obținerea unor structuri optime cu un maxim de producție fizică, diferențiat pe produse, fără a ține seama de nivelul cheltuielilor, în timp ce celălalt indicator asigură realizarea de structuri în care să se obțină maximum de producție dar cu cheltuieli cât mai mici.

Indiferent de criteriul de optimizare ales se urmăreşte, în final, găsirea unei structuri optime a producției şi a consumurilor de resurse astfel încât să se realizeze cerințele de producție fără a depăşi disponibilul existent de resurse.

Evident, pot apare incompatibilități atunci când cerințele de producție impun solicitarea resurselor peste disponibilul existent. În acest caz parametrizarea anumitor restricții ale modelului poate indica la ce nivel trebuie diminuate cerințele sau suplimentate resursele. Altfel, indicii similare se obțin analizând variabilele duale.

Un instrument riguros şi eficient de analiză şi soluționare a acestor probleme îl constituie programarea matematică. Majoritatea problemelor la care se ajunge în practică sunt probleme de programare neliniară. Neliniaritatea implică însă serioase dificultăți matematice, atât de natură teoretică cât şi calculatorie.

Pentru a se putea folosi metodele eficiente ale programării liniare se „liniarizează”, de obicei, modelul, adică se introduc ipoteze suplimentare, mai mult sau mai puțin justificate şi acceptabile din punct de vedere economic, astfel încât să fim conduşi la restricții şi funcții obiectiv liniare. Se obține în acest fel un model „simplificat” care constituie o primă aproximare a fenomenelor reale.

Trebuie însă avut în vedere faptul că ipotezele simplificatoare ne obligă de multe ori să neglijăm aspecte esențiale ale fenomenului real şi deci soluția va reprezenta tot „o primă aproximație” a optimului real.

Un prim pas spre un model mai elastic, care să aproximeze mai bine realitatea, îl constituie un model de programare pătratică şi trebuie precizat încă de la început că din punct de vedere al

eficienței metodele programării pătratice sunt în totul comparabile cu cele ale programării liniare.
Atunci când intervin parametri stocastici se recomandă apelarea la unele metode de modelare stocastică.
Cercetările din ultima vreme au făcut eforturi pentru a soluționa numeroasele probleme de ordin teoretic şi metodologic intervenite la aplicarea programării stocastice în problemele din economie. Dificultatea implementării acestora determină analiştii să transforme problemele în cazuri particulare şi anume să le rezolve fie pentru un anumit nivel mediu al variabilei aleatoare, fie pentru anumite realizări ale lor, devenind astfel probleme deterministe.
Caracteristic acestor metode este faptul că permite exprimarea dependenței dintre activități şi resurse şi că oferă posibilitatea introducerii unor funcții obiectiv care exprimă într-o formă sau alta eficiența activității globale.

b) Problemele de decizii secvențiale sunt cele în care trebuie găsită calea optimă de evoluție a unui proces economic care îşi modifică starea în funcție de o succesiune de decizii adoptate în mod secvențial.
Spre deosebire de problemele din prima categorie, acest mod de abordare surprinde o succesiune de stări ale sistemului analizat modificate prin deciziile adoptate. Deciziile pot fi fundamentate empiric sau pot fi optimizate prin modele de programare. Important este însă faptul că aceste decizii pot fi nu numai de natură temporală dar şi spațială sau pur logică. Elementul decizional odată adoptat modifică starea sistemului, iar succesiunea deciziilor (indiferent dacă e temporală sau numai logică) poate să perturbe sistemul de la starea fixată ca obiectiv.
Metodele de programare dinamică oferă cadrul general pentru formularea şi rezolvarea acestui tip de probleme. Spre deosebire de programarea liniară unde modelarea devine o problemă condiționată de baza de date existentă şi de construirea variabilelor şi restricțiilor adecvate, în modelarea prin programarea dinamică problema esențială este aceea a formulării algoritmului specific fenomenului economic abordat.
Elementele ce trebuiesc stabilite în cazul modelării prin programarea dinamică sunt: etapele procesului secvențial; caracterizarea algoritmică a mulțimii stărilor sistemului; mulțimea deciziilor ce pot fi adoptate; comportarea sistemului; utilitățile parțiale ale deciziilor.
Pentru simplificare în general funcția de utilitate este presupusă aditivă.
Organizarea datelor în programarea dinamică se poate realiza şi cu ajutorul grafurilor.
Stabilirea politicii optime presupune calcularea valorii utilității totale pentru fiecare politică şi determinarea acelor politici pentru care utilitatea totală atinge valoarea maximă (sau depăşeşte un anumit prag considerat acceptabil).
Ipotezele de bază ale programării dinamice sunt:
- sunt excluşi factorii incontrolabili, trecerea sistemului dintr-o stare în alta făcându-se doar în urma adoptării unei decizii.
- oricând se poate determina o politică în evoluția sistemului.
Apar de cele mai multe ori însă situații în care nu putem preciza cu certitudine comportarea sistemului decât cu o anumită

probabilitate. Astfel avem de-a face cu o problemă de programare dinamică stocastică destul de uşor de formulat dar greu de soluţionat (crearea unor baze de date pentru asemenea probleme cere efectuarea unor calcule statistice laborioase în condiţiile cunoaşterii sistemului într-un număr mare de situaţii asemănătoare pentru a stabili probabilităţile anumitor stări).
Dacă aceste probabilităţi pot fi calculate, modelarea dinamică poate utiliza şi lanţurile Markov care descriu procese dinamice ale căror stări la un moment dat nu depind de succesiunea anterioară de stări.
Determinarea unor strategii în condiţii de risc sau incertitudine, în situaţia în care se ia în considerare şi răspunsul sistemului la deciziile luate, este o problemă care se poate formula în termenii teoriei jocurilor.
Modelarea prin teoria jocurilor ţine cont de reacţia sistemului la deciziile luate din etapă în etapă. Este tot o problemă de modelare dinamică în care însă se ia în considerare posibilitatea ca sistemul să răspundă diferit la una şi aceeaşi condiţie (nu mai este valabilă condiţia de univocitate) şi să penalizeze printr-o funcţie de utilitate proprie utilitatea generală a strategiei abordate.
Organizarea dinamică a producţiei poate fi abordată prin metode de teoria grafurilor, ca şi prin oricare alte metode de programare dinamică.

c**) Problemele de corelaţie economică** sunt probleme de continuitate referitoare la tendinţele de evoluţie a fenomenului economic. Deosebim două tipuri:
- interrelaţii şi dependenţe între fenomene economice;
- evoluţia - logică sau temporală - a fenomenelor economice.

În procesul decizional este necesar să se dispună de informaţie statistică variată şi complexă, în care să se cunoască şi să se folosească cu discernământ relaţiile de interdependenţă dintre factori şi efecte.
Legături între indicatori se pot întâlni în întreaga activitate a unei firme: în activitatea de realizare şi consum a producţiei obţinute, între indicatorii de producţie şi cei de eficienţă şi profitabilitate sau între resurse şi rezultatele utilizării lor.
În condiţiile în care activitatea unei firme este gândită într-o viziune sistemică, decidentul trebuie să aibă în permanenţă în vedere procesul de formare a fiecărui fenomen analizat în funcţie de factorii obiectivi şi subiectivi, proprii firmei sau conjuncturali (inclusiv cei de mediu) care-l determină, precum şi implicaţiile pe care fenomenul analizat le induce asupra altora cu care se găseşte în interdependenţă. Acest proces de analiză factorială a fenomenelor economice nu se poate realiza decât utilizând ştiinţific metodele de corelaţie bine fundamentate mai ales de către statistică.
În cadrul fenomenelor economico – financiare iau naştere o serie de legături, de interdependenţe, determinate fie de acţiunea unor cauze comune, fie ca rezultat al unor cauze diferite. Între fenomenele din orice domeniu se pot întâlni legături numeroase şi variate. În primul rând ele pot fi de tip funcţional sau determinist şi de tip stocastic, sau indeterministe.
Multiplele aspecte care se pun în legătură cu aplicarea în practică a metodelor de calcul şi interpretare a legăturilor existente se

impun parcurgerea următoarelor etape de lucru[2]:
- identificarea, selectarea şi ierarhizarea variabilelor factoriale;
- culegerea şi sistematizarea datelor primare;
- verificarea existenţei sau lipsei legăturii;
- verificarea formei şi direcţiei legăturii;
- alegerea modelelor de calcul a gradului de dependenţă;
- interpretarea probabilistică a rezultatelor obţinute din aplicarea metodelor de corelaţie dacă datele provin dintr-un sondaj.

Ţinând seama de interdependenţa dintre resurse şi rezultate devine necesară folosirea unor metode care să permită determinarea influenţei separate a factorilor.

O contribuţie importantă în acest sens o au funcţiile de producţie, acestea permiţând rezolvarea unor probleme esenţiale precum:
- elaborarea programelor de dezvoltare economică şi determinarea posibilităţilor de creştere a producţiei, cunoscându-se resursele care pot fi alocate;
- determinarea nivelului optim al producţiei;
- determinarea combinaţiilor de factori cu care se poate obţine cel mai scăzut cost.

Aplicaţiile funcţiilor de producţie în previzionarea producţiei fac obiectul a numeroase studii mai ales în contextul încadrării în conceptul dezvoltării durabile.

Pentru abordarea problemelor se folosesc metodele de simulare respectiv cele de analiză diferenţială.

Metodele de simulare (statică sau dinamică) includ două etape:
- modelarea fenomenului economic;
- parametrizarea anumitor mărimi din model cu scopul de a studia diferite ipoteze de comportare (evoluţie – în cazul dinamic) a sistemului.

Analiza marginală implică studiul comportării sistemului utilizând ecuaţiile diferenţiale. Ipoteza esenţială este continuitatea fenomenului economic.

Alegerea raţională a obiectivelor

La nivelul firmei sunt necesare utilizări ale unor criterii funcţionale care să asigure alegerea unor variante de acţiune eficiente pentru condiţii de producţie prestabilite. Evident că este nerealist scenariul în care s-ar putea determina un criteriu ideal întrucât “optimul absolut“ poate fi determinat doar pe plan matematic fără a avea un corespondent real în practica economică. La nivelul întreprinderii, care este un sistem dinamic, deschis, procesul de dezvoltare presupune o anumită continuitate cât şi un salt calitativ. Mai concret, aprecierea rezultatelor diferitelor variante de acţiune depinde în mare măsură de restricţiile ce se formulează în legătură cu funcţionarea sistemului de producţie al firmei analizate.

Având în vedere faptul că la nivelul unei firme specificul procesului decizional este definit – printre alte caracteristici – de subprobleme relativ independente (ca de exemplu, stabilirea profilului şi specializarea unităţii), acesta se divizează în timp şi spaţiu. O parte din decizii se adoptă la nivelul sistemului de producţie al firmei, o altă parte a problemelor se soluţionează la

[2] E.Biji (coordonator): Statistica managerială a agentului economic din agricultură, Editura Ceres, Bucureşti, 1998

nivelul diferitelor subsisteme. Activitatea practică impune astfel necesitatea soluționării unei palete diversificate de probleme ce apar ca fiind de sine stătătoare, într-un grad mai mare sau mai redus.
Modelele decizionale, inclusiv cele economico-matematice, pot să conducă spre evidențierea unor rezultate mai bune dacă sunt adaptate condițiilor de producție. Totuşi ținând cont că unele criterii asociate diferitelor probleme decizionale sau subsisteme pot fi incompatibile cu criteriile ce-şi dovedesc oportunitatea la nivelul sistemului, în ansamblul său, apare problema asigurării concordanței dintre criteriile utilizate la diferitele eşaloane ale firmei.
Se impune evidențierea unor erori posibile în legătură cu utilizarea criteriilor de selectare a variantelor de acțiune:
- Încercarea de a evalua şi ordona variante incomparabile prin criterii raționale. Rezultatul aplicării unuia sau altuia dintre criterii depinde de respectarea consecventă a condițiilor ce asigură comparabilitatea variantelor de acțiune. Aceasta s-ar realiza doar dacă se exprimă şi se comensurează corect veniturile şi cheltuielile iar variantele analizate sunt aduse la un numitor comun, fie în privința veniturilor, fie în privința cheltuielilor implicate în realizarea lor.
- Insuficienta analizare a restricțiilor ce condiționează realizarea obiectivelor. Erori de această natură apar atunci când diferitele variante se apreciază pe baza unor criterii ce exprimă starea extremală (minim sau maxim) a unor indicatori cum ar fi: cheltuieli necesare pe unitatea de produs sau o altă mărime de tipul cheltuieli la 1000 lei venituri totale etc.
- O insuficientă luare în considerare a efectului conexiunii inverse. Ca o consecință directă a unei asemenea erori apare posibilitatea adoptării unor decizii care nu asigură condiția necesară dintre optimul local şi cel global.
- Neanalizarea stabilității şi fiabilității diferitelor soluții admisibile. Diferitele variante se caracterizează printr-un grad inegal de sensibilitate la variația riscului şi incertitudinii în ceea ce priveşte condițiile materiale, factorii de natură tehnică şi economică. Pentru evitarea acestor erori este necesară analiza eficienței diferitelor variante prin luarea în considerare a indicatorilor stabilității, a condițiilor de risc şi incertitudine şi a fiabilității acestora.
- O formulare incorectă a criteriului. În acest sens apar formulări de tipul maximului de rezultate cu minimum de cheltuieli, care conțin de multe ori contradicții de natură logică.
- Utilizarea unor criterii insuficient adaptate caracteristicilor problemei decizionale. Pentru evitarea acestei categorii de erori se impune necesitatea formulării corecte a problemei însoțită de o atentă analiză a conținutului ei tehnico-economic.
Deci, o analiză şi o planificare eficientă cere în mod evident ca obiectivele şi scopurile (care sunt obiective cărora li s-a fixat un anumit termen în care ele trebuie să fie atinse) să fie definite operațional, astfel încât să putem măsura gradul în care ele au fost atinse. De exemplu, afirmația că societatea comercială trebuie să se încadreze pe linia dezvoltării durabile nu înseamnă nimic în absența unor mijloace de a măsura gradul în care acest obiectiv este atins. O afirmare de scopuri nu trebuie să apară ca o predică,

aşa cum se întâmplă adesea. Ea trebuie să fie o colecţie de instrucţiuni care furnizează mijloace pentru o autoevaluare cantitativă.
Printre scopurile şi obiectivele definite cel mai puţin operaţional sunt acelea care fac să intervină noţiunea de profit. Adeseori se întâmplă ca profitul să fie o plăsmuire a imaginaţiei celui care face raportul. O schimbare a raportului sau a sistemului de raportare poate foarte uşor să creeze sau să distrugă profitul. Prin urmare profitul nu este o chestiune obiectivă, cât una de politică. Un obiectiv major al firmei va fi atins definind profitul, şi nu pur şi simplu proclamând importanţa capitală a acestuia. Mai mult, dacă profitul nu este definit, consecinţele pot fi serioase.
Cercetarea Operaţională poate juca un rol major în evitarea unor rezultate eronate, acordând asistenţă decidenţilor în formularea corectă a obiectivelor şi scopurilor ei.
Importanţa Cercetării Operaţionale în pregătirea unor prognoze este evidentă, dar ea mai are şi un alt rol tot atât de important, deşi mai puţin sesizabil. Se pune atât de mult accent pe incertitudinea viitorului, încât se acordă prea puţină atenţie acelor aspecte ale viitorului care sunt virtual inevitabile. Relevarea acestor inevitabilităţi furnizează adesea o bază mai sănătoasă pentru planurile pe termen mediu şi lung decât o fac prognozele asupra aspectelor incerte ale viitorului. De exemplu analiza problemei poluării arată că în viitorul apropiat este foarte probabilă adoptarea unor legislaţii care să impună internalizarea acestor externalităţi. Detectarea acestei probleme poate conduce multe societăţi comerciale la elaborarea unor planuri de producţie în care componenta ecologică să aibă un rol mai mare, reducând costurile generate de poluare.
Adeseori, descoperirea inevitabilului nu este o sarcină uşoară, rezultatele ei sunt de obicei evidente numai retrospectiv. Cercetarea Operaţională poate aduce un serviciu important planificatorilor, efectuând tipul de analiză care este necesar pentru relevarea anumitor aspecte (semnificative) ale viitorului.
În concluzie, trebuie reţinut că pentru elaborarea şi fundamentarea unor decizii raţionale în legătură cu criteriul de selectare a variantelor finale nu există o regulă generală. În fiecare caz în parte punctul de plecare trebuie să-l constituie identificarea cât mai completă a obiectivelor urmărite, a resurselor şi variantelor admisibile, precum şi a efortului economic şi a efectului generat de realizarea diferitelor soluţii. Pe baza cunoaşterii acestor elemente, pentru fiecare categorie de probleme urmează să se stabilească cel mai raţional criteriu de selectare.

1.3.2.Metoda calculului marginal. Analiza microeconomică a consumatorului şi producătorului

1.3.2.1.Generalităţi

Fundamental pentru analiza economică este ideea de funcţie de producţie.
Ea şi conceptul său apropiat, de funcţie de utilitate, formează polii economiei neoclasice.
Producătorul – unul dintre principalii actori ai economiei de piaţă - urmăreşte executarea acelor activităţi ce îi asigură obţinerea outputului dorit.

Intervin astfel factorii de producție, din a căror combinare rezultă diferite niveluri ale producției.
Teoria clasică reprezintă această condiționalitate dintre factorii de producție şi rezultatul acestora cu ajutorul funcțiilor de producție, având forma generică: $Q = Q(K, L, T, \ldots)$
unde:
K – reprezintă factorul capital;
L – factorul forță de muncă;
T – factorul pământ (natura în general).
Acolo unde factorul T nu are rol primordial în estimarea producției, se renunță la includerea lui, funcția de producție având în acest caz forma:
$Q = Q(K,L)$(este, de exemplu, cazul firmelor producătoare de bunuri şi servicii ce folosesc pământul numai ca mijloc de amplasare a activității desfăşurate).
Generalizând, apare următoarea definiție: fiind dat vectorul resurselor (inputurilor) la nivelul firmei f, şi anume $r = r(r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots, r_m)$, se numeşte funcție de producție la nivelul firmei respective, acea aplicație $Q : R^m_+ \to R$ pentru care$Q = Q(r)$ în condițiile în care combinația r există şi este posibilă din punct de vedere tehnologic, iar resursele sunt folosite cu eficiență maximă.
Analiza ce se efectuează prin funcția de producție are ca obiect nu procesul real, ci modelarea sa ca instrument de analiză matematică. De aceea, este foarte important de a pleca de la legile economice ale fenomenelor şi proceselor studiate atunci când se utilizează această metodă.
Factorii de producție pot fi grupați în două categorii, în funcție de modul în care influențează masa produsului: factorii variabili - cei care influențează masa produsului; factorii invariabili - cei care alcătuiesc cadrul procesului de producție studiat, neputându-se însă stabili o legătură strânsă între cantitatea folosită şi cantitatea de produs obținută. Această grupare a factorilor de producție permite transpunerea corectă a diferitelor procese în modele matematice de tipul funcțiilor, având un caracter formal, fiind valabilă doar pentru procesul analizat.
Funcțiile de producție apar deci ca o expresie matematică a legăturilor dintre cauză şi efect.
Spre deosebire însă de funcția matematică, unde fiecărui element x din domeniul funcției îi este asociat un singur element y din codomeniu, funcția de producție este o funcție statistică ce admite ca pentru fiecare unitate de factor (element) studiat x să se obțină mai multe valori (efecte) y în timp şi spațiu.
Trebuie să se aibă în vedere şi faptul că numărul acestor factori este incomensurabil şi interacțiunea lor este diferită, când proporția dintre ei se schimbă, astfel că acelaşi factor în aceeaşi cantitate influențează diferit asupra efectului.
Pe de altă parte, influența tuturor factorilor nu se manifestă niciodată aidoma cu influența precedentă, lucru evident precum faptul că în natură nimic nu este repetabil întocmai. Cunoaşterea funcțiilor de producție permite producătorilor să găsească cea mai bună cale de urmat, prin alegerea celei mai avantajoase alternative.
Cu ajutorul funcțiilor se pun în evidență nu doar posibilitățile de combinare, ci şi de substituție a factorilor în scopul utilizării lor la

nivel minim de cheltuieli sau de distribuție optimă a unei resurse limitate între mai multe activități concurente.
Utilizarea funcțiilor de producție presupune parcurgerea următoarelor etape:

a) analiza datelor concrete şi precizarea variabilelor;
b) identificarea, alegerea tipului de funcție şi estimarea parametrilor;
c) verificarea compatibilităților funcțiilor matematice cu specificul problemei economice pe care trebuie să o rezolve;
d) utilizarea funcțiilor în adoptarea deciziilor economice, cu condiția ca funcțiile să aproximeze corect legătura dintre variabilele analizate.

1.3.3.Caracteristici generale ale funcțiilor de producție

În cele ce urmează se va avea în vedere în principal cazul simplificat în care nu există decât doi factori de producție. Notăm cu Q cantitatea produsă din bunul considerat (evaluată în unități fizice), cu r_1şi r_2 cantitățile utilizate din fiecare factor. Obținem astfel expresia foarte generală a funcției de producție:

$$Q = Q(r_1, r_2)$$

Evident, funcția nu este specificată în mod precis, pentru aceasta fiind necesară cunoaşterea concretă a naturii activității agentului economic analizat şi a proceselor de fabricație utilizate.
Pentru simplificare, presupunem o perfectă divizibilitate a fiecăruia dintre factorii de producție (spunem că există divizibilitate a unui bun, a unui factor de producție atunci când acesta poate fi obținut şi utilizat în unități oricât de mici).
Bineînțeles, nu se poate ajunge la ipoteza comodă din punct de vedere matematic a continuității şi derivabilității funcției de producție, decât dacă se presupune că factorul de producție este infinit divizibil.
Se impune în acest timp ipoteza de adaptabilitate, definită ca facultatea de a asocia unei unități date dintr-un factor de producție un număr mai mic sau mai mare de unități dintr-un alt factor (pământul este exemplul clasic de factor adaptabil: pe o suprafață dată este posibil să lucreze, cu o eficacitate variabilă, un număr mai mare sau mai mic de muncitori).
Dacă factorii respectă ambele ipoteze (de adaptabilitate şi divizibilitate) spunem că există posibilitatea de substituire între factorii de producție.

Influența variației unui singur factor de producție.
Pornind de la forma funcției de producție se pot calcula o serie de indicatori pe baza variației unui singur factor de producție.
Productivitatea marginală a fiecăruia dintre factorii de producție este, aşa cum se ştie, sporul de producție care se obține prin utilizarea unei unități suplimentare din factorul de producție respectiv, cantitatea folosită din celălalt factor rămânând neschimbată.
Din punct de vedere matematic este vorba de derivata parțială a funcției de producție în raport cu factorul considerat.

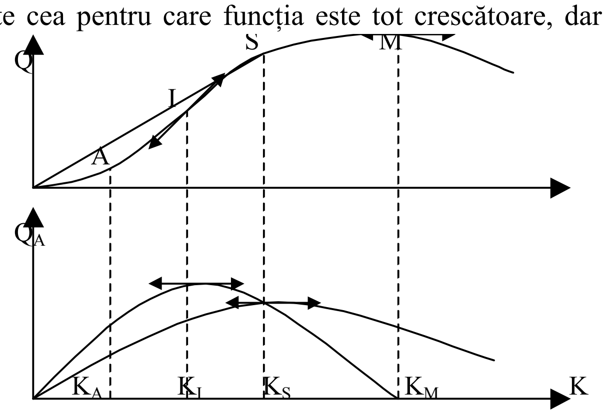
$$\eta_{r1} = \partial Q / \partial r_1 = Q'_{r1}$$

$$\eta_{r2} = \partial Q / \partial r_2 = Q'_{r2}.$$

Esenţa analizei marginaliste poate fi pusă în evidenţă analizând următorul exemplu deosebit de simplu şi anume, studiul combinaţiei pământ-muncă.
Fie Q = Q(K,L)
unde:
Q = recolta totală pe un an;
K = suprafaţa de teren ocupată de cultură;
L = număr de lucrători.
Se presupune că factorii de producţie sunt adaptabili şi divizibili şi se consideră că variază fie suprafaţa disponibilă (L = $\overline{L}$=const.), fie numărul de lucrători (K = $\overline{K}$=const.).

Să analizăm succesiv cele două cazuri:
I. **L = const., K = variabil**.
În ipoteza că se dispune de o forţă de muncă dată, de un număr de lucrători fix (şi deci şi de un stoc determinat de mijloace de producţie), presupunem că producţia anuală (evaluată în unităţi fizice) variază după cum este indicat în graficul următor.
Curba porneşte din origine: pentru K = 0, Q = 0.
Creşterea suprafeţei induce o evoluţie a recoltei într-un ritm variabil.
La început sporirea se face într-un ritm accelerat, apoi această mărire se stabilizează (porţiunea OI este crescătoare şi convexă,curba trecând prin
punctul de inflexiune I) şi devine din ce în ce mai lentă (porţiunea

IS este cea pentru care funcţia este tot crescătoare, dar concavă,



punctul S fiind de maxim) până în punctul M, unde creşterea se opreşte, înainte să înceapă descreşterea producţiei (se intră în zona de ineficienţă, porţiunea MN este descrescătoare şi concavă; astfel producţia este posibilă dar ineficientă).
Evident producţia ar putea rămâne stabilă dacă suprafaţa suplimentară nu ar fi cultivată; curba arată ce s-ar petrece dacă producătorul ar cultiva efectiv mai mult decât K_M.
Productivitatea marginală (sau produsul marginal) a (al) terenului este sporul de producţie care se obţine prin utilizarea unei unităţi suplimentare de teren în procesul de producţie, în condiţiile în care folosirea celorlalţi factori de producţie rămâne neschimbată.
Dacă se cultivă K_2 în loc de K_1, notând $\Delta K = K_2 - K_1$, producţia trece de la Q_1 la Q_2, modificarea cantităţii produse fiind:
$$\Delta Q = Q_2 - Q_1 = Q(K_2, L) - Q(K_1, L).$$
Cum această creştere depinde de valoarea lui ΔK, prezintă interes

variațiile relative ale lui $\frac{\Delta Q}{\Delta K}$.

În ipoteza făcută că factorul de producție pământ este perfect divizibil, se pot face raționamente pentru creșteri infinit de mici ale suprafeței folosite. În acest caz, definim producție marginală a pământului η_K ca derivată a funcției de producție în raport cu pământul $\eta_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$

(i.e. producția fizică marginală este egală cu panta tangentei la curba producției fizice totale).

Folosim notația $\eta_K = Q'_K$ (evident funcția de producție Q este funcție de doua variabile, dar am presupus L = const., și în acest caz suprafața este singura variabilă). Conform presupunerilor făcute, producția trece prin maximul M pentru suprafața K_M.

Condiția matematică necesară pentru existența unui maxim estre ca derivata funcției în acest punct să se anuleze (i.e. $Q'_K = 0$ pentru $K = K_M$).

Studiind curba producției globale Q, observăm existența punctului de inflexiune I care este caracterizat din punct de vedere matematic prin condiția $Q''_K = 0$. Dar derivata de ordinul II a lui Q în raport cu K este derivata (de ordinul I) productivității marginale $\eta_K = Q'_K$ în raport cu K. Deci pentru $K = K_I$, producția marginală prezintă un maxim, întrucât derivata sa în raport cu K se anulează.

Productivitatea medie este raportul dintre producția totală Q și suprafața K corespunzătoare $\bar{\eta}_K = \frac{Q}{K}$. Cum Q = Q(K)

$= \frac{d\bar{\eta}_K}{dK} = \frac{1}{K}\left(Q'_K - \bar{\eta}_K\right)$

avem relațiile:

1) $Q'_K = \bar{\eta}_K <=> \frac{d\bar{\eta}_K}{dK} = 0$ => curba producției marginale intersectează curba productivității medii în punctul de maxim al acesteia din urmă;

2) $Q'_K > \bar{\eta}_K <=> \frac{d\bar{\eta}_K}{dK} > 0$ => curba producției marginale este situată deasupra curbei producției medii, atunci când aceasta din urmă este crescătoare;

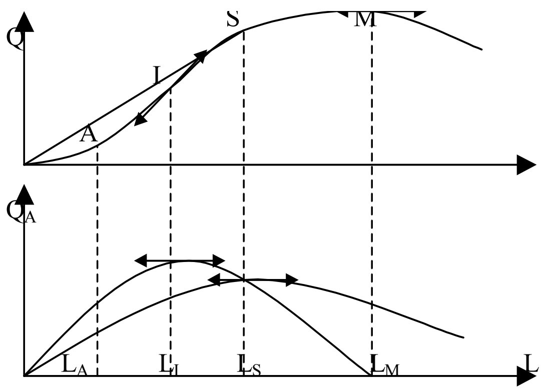
3) $Q'_K < \bar{\eta}_K <=> \frac{d\bar{\eta}_K}{dK} < 0$ => curba producției marginale este poziționată sub curba producției medii, atunci când aceasta din urmă este descrescătoare.

În concluzie se pot defini trei zone de producție și anume:

- Zona I, delimitată de curba OS, cunoscută și sub numele de "primul stagiu de producție", în care producția crește odată cu creșterea cantității de factor K consumată.
- Zona II, în care producția este în continuare în creștere, atingând în punctul M maximul de producție. În această zonă productivitatea fizică marginală, cât și cea medie sunt în descreștere, dar păstrează semnul plus. Zona II este o zonă de

eficiență tehnologică[3].
- Zona III, în care producția fizică totală scade, în timp ce raportul $K/\overline{L}$ creşte, iar producția fizică marginală este negativă. Este o zonă de ineficiență economică.

II. **K = const., L = variabil**
Ipoteza luată în considerație este simetrică față de cazul precedent. Avem notația Q = Q(K, L), dar factorul fix este suprafața, iar factorul variabil numărul de unități de muncă.
Fie $\eta_L = Q_L^{'} = \frac{dQ}{dL}$ producția marginală a muncii şi $\overline{\eta}_L = \frac{Q}{L}$ producția medie a muncii.
Productivitatea marginală a muncii (sau produsul marginal al muncii) este surplusul de producție care se obține din folosirea unei unități suplimentare de muncă în procesul de producție, utilizarea celorlalți factori de producție rămânând neschimbată.
Prelucrarea matematică a factorului muncă devine absolut identică cu cea a factorului pământ.
Putem considera curba de producție globală ca având forma indicată în graficul următor, rezultând analog curbele productivității medii şi productivității marginale a muncii.



Se pune problema cum variază producția atunci când se combină mai mult sau mai puțin dintr-un factor variabil cu o cantitate dată dintr-un factor fix.
Deşi nu este permisă o generalizare, se reține adesea ipoteza celebră, numită a descreşterii randamentelor.
Expunerea care urmează se referă la randamentele factoriale, de substituire, în care unul dintre factorii de producție este variabil, şi nu la cazul randamentelor de scară, în care ceea ce variază este mărimea producției.
A. Ipoteza randamentelor (factoriale) descrescătoare

Această ipoteză, adesea numită legea randamentelor descrescătoare, reflectă faptul că, pentru un nivel tehnic dat, sporirea utilizării unui factor variabil în condițiile unei cantități date dintr-un factor fix va determina o creştere a producției din ce

[3] Un proces de producție se numeşte tehnologic ineficient, dacă există un altul care produce acelaşi output cu un consum mai mic de resurse, sau cu acelaşi volum de resurse permite obținerea unui volum mai mare de output.

în ce mai mică.
Fiecare unitate suplimentară dintr-un factor de producție variabil va adăuga mai puțin producției totale decât a făcut-o unitatea precedentă, ceea ce înseamnă că productivitatea marginală va scade.
În egală măsură, se va reduce şi productivitatea medie, productivitatea pe unitate de factor variabil diminuându-se.
Evident această lege este denumită impropriu, ea ar fi trebuit să se numească legea randamentelor marginale descrescătoare.
Această ipoteză pare să ilustreze experiența curentă din mai toate procesele economice.

B. Ipoteza randamentelor (factoriale) crescătoare

Presupunem:

1) Q = aKL, unde factorul variabil este munca

$$\bar{\eta}_L = \frac{Q}{L} = aK,\ \eta_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = aK \qquad \text{Deci } \bar{\eta}_L = \eta_L.$$

2) Q = aL + bK $\eta_L = \frac{\partial Q}{\partial L} = a = const.$

$$\bar{\eta}_L = \frac{Q}{L} = a + b\frac{K}{L}\xrightarrow[L\to\infty]{} a$$

Evident este lipsit de realism să presupunem că productivitățile marginale rămân constante, oricare ar fi cantitatea folosită din factorul variabil; începând de la un anumit nivel de utilizarea, producția suplimentară obținută din folosirea unei unități suplimentare de muncă nu poate rămâne constantă, deci productivitatea marginală scade. Rezultă deci că randamentele factorilor nu pot rămâne constante decât dacă întruneşte limitele de utilizare date.
Revenind la cazul general Q = Q(r_1,r_2), am remarcat deja că:

$$\eta_{r1} = \frac{\partial Q}{\partial r_1} = Q'_{r1} \quad \text{şi} \quad \eta_{r2} = \frac{\partial Q}{\partial r_2} = Q'_{r2}$$

Ținând seama de ipoteza randamentelor descrescătoare, este mai comod să presupunem că productivitățile marginale sunt pozitive şi descrescătoare, adică:

$Q'_{r1}>0$ şi $Q''_{r1^2}< 0$ $\qquad$ $Q'_{r2}>0$ şi $Q''_{r2^2}< 0$

Evident aceasta este o ipoteză, existând cazuri banale (Exemplu: funcția de producție liniară în care productivitățile marginale sunt constante).
Productivitățile medii ale fiecărui factor se pot defini ca $^{Q}/_{r1}$ şi $^{Q}/_{r2}$.

Observație Este vorba, de fapt, de productivitatea aparentă, diferită de productivitatea ansamblului factorilor.

Generalizare. O viziune realistă a proceselor de producție conduce la definirea unei funcții cu n variabile, adică cu n factori de producție:

Q = Q(r_1, r_2,..., r_n)

Presupunem factorii de producție divizibili şi adaptabili şi definim:

- productivitatea (aparentă) medie:

$$\bar{\eta}_{r_i} = \frac{Q}{r_i}, (\forall) i = \overline{1,n}$$

- productivitatea marginală:

$$\eta_{r_i} = \frac{\partial Q}{\partial r_i}, (\forall) i = \overline{1,n}$$

şi în aceste caz este mai normal să ne încadrăm în ipoteza randamentelor descrescătoare $\left[Q'_{r_i} > 0 \text{ şi } Q''_{r_i^2} < 0\right]$.

Influenţa variaţiei simultane a mai multor factori

S-a văzut ce se întâmplă cu nivelul producţiei la o creştere numai la nivelul unui singur factor de producţie. Multiplicarea nivelului fiecărui factor de producţie cu un scalar λ, va implica o anumită modificare a nivelului outputului.

Pentru a surprinde această schimbare, se calculează un indicator deosebit de important în analiza pe termen lung a unui proces de producţie, şi anume revenirea la scală, cu cele trei forme ale sale:

i) revenirea constantă la scală (funcţia de producţie este omogenă de grad 1, ceea ce înseamnă că la multiplicarea cu λ unităţi a inputurilor, outputul se va multiplica de asemenea cu λ unităţi);

ii) revenirea crescătoare la scală (multiplicând inputurile cu λ supraunitar, se obţine un output multiplicat cu λ'<λ);

iii) revenirea descrescătoare la scală (amplificând fiecare input cu λ>1 se obţine un output amplificat cu λ''>λ).

Prezentarea anterioară se referă la revenirea crescătoare şi descrescătoare la scală la nivel global.

Interesează ce se întâmplă la nivel local, atunci când tehnologia înregistrează o revenire crescătoare la scală pentru o parte din inputuri, iar pentru altele descrie o revenire descrescătoare la scală.

Răspunsul constă în folosirea elasticităţii scalei, definită în modul următor:$\varepsilon(r) = [\partial Q(\lambda r)/ \partial\lambda]:[Q(r)/ \lambda] / \lambda=1$

şi care măsoară modificarea procentuală a outputului ca urmare a creşterii cu un procent a scalei.

Se spune astfel că tehnologia descrie o revenire constantă (crescătoare, descrescătoare) locală la scală, după cum ε(r) este egală (mai mare, mai mică) cu 1.

Importanţa calculului elasticităţii scalei, constă în aceea că pe baza rezultatului obţinut, se pot lua decizii la nivelul firmei, privind aria de activităţi pe care să le desfăşoare: obţinerea unui output la nivelul unei singure activităţi centralizate sau descentralizat pe p – activităţi.

Indicatori de elasticitate.

Pe lângă indicatorii medii şi cei marginali, o importanţă mare în studiul proceselor economice îl au şi indicatorii de elasticitate şi substituţie.

Dacă Q = Q(r_1,..., r_n) reflectă o anumită activitate, având rezultatul Q, funcţie de factorii r_1,..., r_n, definim **elasticitatea nivelului activităţii** în raport cu un factor r_i: $E_{r_i} = \frac{\Delta Q}{Q} : \frac{\Delta r_i}{r_i}$ sau

$E_{r_i} = \frac{\Delta Q}{\Delta r_i} : \frac{Q}{r_i}$, unde ΔQ este variaţia (creşterea sau descreşterea) nivelului activităţii Q pe seama variaţiei Δr_i a factorului r_i, ceilalţi factori rămânând constanți; cu aceste notații, elasticitatea E_{ri}reprezintă **creşterea** (descreşterea) **procentuală** a nivelului activității $\left(\frac{\Delta Q}{Q}\%\right)$ la o variație (creşterea, descreşterea) de la 1% a factorului r_i (deci $\frac{\Delta r_i}{r_i} = 1\%$), ceilalți factori rămânând neschimbați.

Dacă $Q = Q(r_1,..., r_n)$ este o funcție de clasa C^1, atunci indicatorul definit mai sus se poate scrie: $E_{r_i} = \frac{\partial Q}{\partial r_i} : \frac{Q}{r_i}$

Se constată că elasticitatea este raportul dintre indicatorul marginal şi cel mediu corespunzător factorului r_i, deci $E_i = \frac{\eta_{r_i}}{\bar{\eta}_{r_i}}$.

Interpretare: Dacă $Q = Q(x_1,..., x_n)$ este o funcție de producție, atunci $E_{r_i} = \frac{\partial Q}{\partial r_i} : \frac{Q}{r_i}$ reprezintă elasticitatea producției în raport cu factorul r_i; de pildă, dacă r_i este forța de muncă folosită de agentul economic, atunci Er_i este elasticitatea producției în ocuparea cu forța de muncă şi arată cu câte procente creşte producția când forța de muncă ar creşte cu 1%.

Legătura dintre elasticitatea scalei şi elasticitatea outputului în raport cu fiecare factor

Pornind de la formula cu logaritmi: $\varepsilon(r)=[\partial \ln Q(\lambda r)/ \partial \ln\lambda]_{|\lambda=1}$ se poate spune că elasticitatea scalei este egală cu suma elasticităților outputurilor în raport cu fiecare din factorii analizați[4].

Indicatori de substituție.

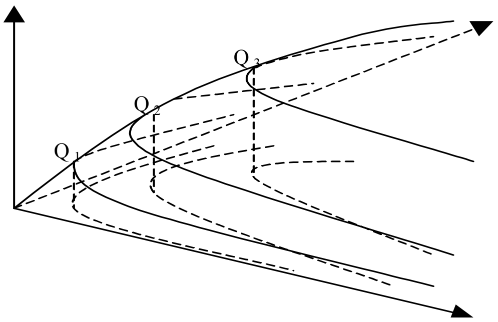
Pentru început este necesară introducerea noțiunii de izocuante (curbe ale izoprodusului).

În cazul particular, n = 2, putem reprezenta în spațiul tridimensional, suprafața de producție din care deducem curbele izoprodusului sau izocuantele. Astfel pe axa verticală măsurăm producția Q care este funcție crescătoare de cantitatea utilizată din fiecare dintre factorii care sunt reprezentați pe celelalte două axe.

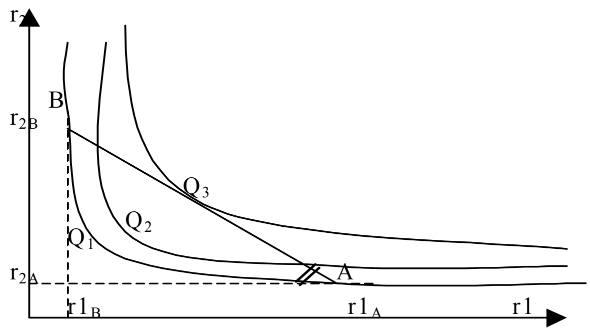
Conform graficului, producția poate fi mărită dacă sporeşte cantitatea utilizată a unuia sau altuia din cei 2 factori, sau dacă sporeşte simultan cantitatea amândurora.

Considerând Π_1, Π_2, Π_3, plane duse prin Q_1, Q_2, Q_3, paralele cu planul (xOy) obținem 3 curbe (Q_1), (Q_2), (Q_3), care trasează contururile suprafeței la cele 3 nivele de producție considerate.

[4]derivând membrul drept al egalității se obține $[\partial \ln Q(\lambda r)/ \partial \ln\lambda]'_{|\lambda=1}=(1/Q(\lambda r))[\partial Q(\lambda r)/ \partial \ln\lambda]_{|\lambda=1}=(1/Q(\lambda r))[\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r)][\partial(\lambda r)/\partial \ln\lambda]_{|\lambda=1}=(1/Q(\lambda r))\Sigma[\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_i)][\partial(\lambda r_i)/\partial \ln\lambda]_{|\lambda=1}\ \Sigma[\partial Q(\lambda r)/ \partial(r_i)]:[Q(r)/ r_i]_{|\lambda=1}=\Sigma\varepsilon_i$.



Proiectând pe plan orizontal obținem o imagine în spațiul bidimensional, dată în figura de mai jos.



Curbele (Q_1), (Q_2), (Q_3) sunt izocuante sau curbe ale producției egale.

Se dă următoarea definiție: o izocuantă reprezintă totalitatea combinațiilor factorilor de producție care permit obținerea aceluiaşi nivel al producției. (Pentru funcția de producție cu n factori, izocuanta reprezintă hipersuprafața în spațiul factorilor $\mathbf{R}^n$ pe care, oricare ar fi contribuția factorilor, nivelul producției rămâne acelaşi Q_1.)

Detaliem pentru înțelegere, în cazul n = 2 factori (r_1, r_2) .

Notăm:$\Delta r_1 = r_{1B}-r_{1A}$, $\Delta r_2 = r_{2B}-r_{2A}$

Se constată că o creştere a factorului r_1 cu Δr_1 contribuie la o reducere din factorul r_2 cu Δr_2, producția rămânând aceeaşi, la nivelul Q_1, combinația factorilor fiind reprezentată pe izocuantă, prin punctele A, respectiv B.

Evident, este posibilă o infinitate de combinații, din moment ce curba este continuă (aceasta rezultă din ipoteza divizibilității perfecte a factorilor de producție).

Observații:

1) Există o infinitate de izocuante, fiecare curbă corespunzând unui nivel dat al producției. Nivelul producției este cu atât mai ridicat, cu cât ne îndepărtăm spre „N-E” graficului (exemplu: $Q_3 > Q_2 > Q_1$).

2) Este imposibil ca două izocuante să se întretaie.

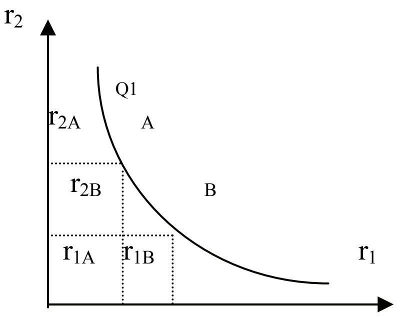
Substituibilitatea factorilor

Din motive tehnice, mod de procurare, rezerve limitate, dar şi economice, nu de puține ori se pune problema ca unul sau mai mulți factori să fie substituiți parțial sau dacă este posibil şi total cu alții.

Rata marginală de substituție între factori

Rata marginală de substituție între cei doi factori r_2 şi r_1, notată RMS, măsoară cantitatea dintr-un factor r_2 necesară pentru a compensa pierderea de producție determinată de diminuarea cu o unitate în utilizarea celuilalt factor r_1. [i.e. numărul de unități r_2

care trebuie substituite unei unități din r_1 pentru ca producția să rămână constantă].
RMS poate fi exprimată pornind de la panta izocuantei, corespunzând nivelului de productivitate considerat Q_1.
Fie A, B două puncte situate pe această curbă.
Dacă, combinația productivă inițială este cea care corespunde punctului A şi dacă producătorul este nevoit să diminueze cu o cantitate mică $\Delta r_1 = r_{1B} - r_{1A}$, volumul folosit din factorul r_1, se observă că trebuie să utilizeze o cantitate suplimentară $\Delta r_2 = r_{2B} - r_{2A}$, din celălalt factor, pentru a rămâne la acelaşi nivel de producție.
Numim rată medie de substituire a factorilor, raportul $\bar{r} = -\frac{\Delta r_2}{\Delta r_1}$,
iar când $\Delta r_1 \to 0$, raportul $r_{\frac{r1}{r2}} = -\frac{dr_2}{dr_1}$ (sau pentru simplificare $r = -\frac{dr_2}{dr_1}$) se numeşte rata marginală de substituție, pentru r_1 şi r_2, care arată că o creştere (descreştere) a factorului r_1 este consecutivă unei descreşteri (creşteri) a factorului r_2.
Pentru determinarea expresiei analitice a RMS: se diferențiază funcția $Q = Q(r_1, r_2)$ de-a lungul izocuantei Q_1.
Se obține $\frac{\partial Q}{\partial r_1} \cdot dr_1 + \frac{\partial Q}{\partial r_2} \cdot dr_2 = 0 \to r = -\frac{dr_2}{dr_1} = \frac{Q'_{r1}(r_1, r_2)}{Q'_{r2}(r_1, r_2)}$
Grafic, rata marginală de substituire tehnică este ilustrată în figura următoare:



Astfel, RMS este raportul invers al productivităților marginale în punctul considerat (el este, într-adevăr, egal cu raportul productivității marginale a factorului r_1 față de productivitatea marginală a factorului r_2).
Se poate generaliza această relație pentru cazul a n factori $r_1,..., r_n$, RMS a factorului r_i prin factorul r_j este $r_{i,j} = -\frac{dr_j}{dr_i} = \frac{\eta_i}{\eta_j}$ şi se deduce diferențiind funcția $Q = Q(r_1,..., r_n)$ pe izocuanta Q_1, când factorii r_k ($k \neq i,j$) rămân la acelaşi nivel (deci $dr_k = 0$).
Dar, pe lângă RMS între doi factori, interesează şi elasticitatea acesteia.
Acest indicator,elasticitatea de substituire tehnică σ (introdus de Hicks) – măsoară pe o izocuantă modul cumun factor poate fi substituit cu altul. Se defineşte ca variație relativă (%) a intensității de utilizare a factorilor, consecutive variației relative

(%) a RMS a factorilor: $\sigma = \dfrac{d\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)}{\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)} : \dfrac{dr}{r}$

sau $\sigma = E_r^{-1}$, adică inversul elasticității ratei de substituție r.
Astfel, pentru o funcție de producție cu doi factori K, L, raportul $\dfrac{K}{L} = k$ - reprezintă înzestrarea tehnică a muncii şi deci $\sigma = \dfrac{1}{E_r(k)}$.

Se găseşte expresia analitică

$$\sigma = \frac{dr}{dk} : \frac{r}{k}, \text{unde: } r = \frac{\eta_L}{\eta_K} = \frac{f(k)}{f(k) - k \cdot f'(k)}$$

Deci:

$$\frac{dr}{dk} = \frac{f'(k) \cdot [f(k) - k \cdot f'(k)] - f(k) \cdot [f'(k) - f'(k) - k \cdot f''(k)]}{[f(k) - k \cdot f'(k)]^2} =$$

$$= \frac{f'(k) \cdot f(k) - k[f'(k)]^2 + k \cdot f(k) \cdot f''(k)}{[f(k) - k \cdot f'(k)]^2}$$

=>

$$\sigma = \frac{f'(k) \cdot f(k) - k \cdot [f'(k)]^2 + k \cdot f(k) \cdot f''(k)}{[f(k) - k \cdot f'(k)]^2} \times \frac{k \cdot [f(k) - k \cdot f'(k)]}{f(k)}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{k \cdot \{f'(k) \cdot f(k) - k \cdot [f'(k)]^2 + k \cdot f(k) \cdot f''(k)\}}{f(k) \cdot [f(k) - k \cdot f'(k)]}}$$

În general, σ - măsoară sensibilitatea structurii tehnice la modificarea structurii costurilor relative p_{r1} şi p_{r2} ale factorilor r_1 şi r_2, deoarece, în condiții de optim, $\dfrac{\eta_{r1}}{\eta_{r2}} = \dfrac{p_{r1}}{p_{r2}}$ (vom demonstra acest lucru mai târziu), deci RMS se mai scrie $r = \dfrac{p_{r1}}{p_{r2}}$ în punctul optim.

Acest indicator dă posibilitatea consiliului de conducere al firmei să decidă asupra celei mai convenabile combinații a factorilor când prețul acestora variază.

Funcții de producție omogene şi omotetice.
Există anumite tipuri de funcții de producție cu proprietăți deosebite, ce permit o analiză amănunțită a activității firmei din punct de vedere tehnologic. Un mare interes îl prezintă omogenitatea şi omotetia.

Funcții de producție omogene
Funcția de producție $Q : R^m_+ \rightarrow R$ se numeşte omogenă de grad k dacă multiplicând fiecare input cu $\lambda>0$ atunci outputul se va multiplica cu λ^k (i.e. $Q(\lambda r) = \lambda^k Q(r)$).

Omogenitatea unei funcții de producție devine deosebit de utilă în demonstrarea următoarelor proprietăți:

i)Elasticitatea scalei pentru o funcție omogenă de grad k este egală cu k.

Astfel din $\varepsilon(r) = [\partial Q(\lambda r)/ \partial\lambda]:[Q(\lambda r)/ \lambda]=[\partial(\lambda^k Q(r))/ \partial\lambda]:[\lambda^k Q(r)/ \lambda]$
$= k\lambda^{k-1}Q(r)/(\lambda^{k-1}Q(r)) = k.$

rezultă astfel că pentru o funcție omogenă de grad k, la o creştere cu o unitate a scalei, outputul va creşte cu k unități, ceea ce înseamnă că pentru k=1 avem revenire constantă la scală.

ii)Derivatele parțiale ale funcției de producție omogene de grad k sunt la rândul lor funcții omogene de grad k-1.

Derivând expresia din definiția funcției omogene de grad k în raport cu r_i se obțin expresiile:

$\partial Q(\lambda r)/ \partial r_i = [\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_i)][\partial(\lambda r_i)/ \partial r_i] = [\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_i)]\lambda$

respectiv pentru membrul drept $\partial[\lambda^k Q(r)]/ \partial r_i = \lambda^k \partial[Q(r)]/ \partial r_i.$

Astfel $\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_i) = \lambda^{k-1}\partial[Q(r)]/ \partial r_i.$

Se observă că pentru k=1, funcția de producție liniar omogenă are productivitatea marginală independentă de scală, depinzând numai de vectorul inputurilor r: $\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_i) = \partial[Q(r)]/ \partial r_i.$

iii) Pantele izocuantelor pentru o funcție de producție omogenă de grad k depind numai de proporția inputurilor, fiind independente de scala de producție.

Diferențiind expresia din definiția funcției omogene de grad k se obține pentru $r=(r_1,r_2)$

$d\overline{Q} = dQ(r) = [\partial Q(r) / \partial r_1]d r_1+[\partial Q(r) / \partial r_2]d r_2 = 0$

de unde panta izocuantei este $dr_1/dr_2 = -Q_2'/Q_1'$.

Dar $d\overline{\overline{Q}} = dQ(\lambda r)=[\partial Q(\lambda r)/\partial(\lambda r_1)][\partial(\lambda r_1)/ \partial r_1]d(\lambda r_1)+$
$+[\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_2)][\partial(\lambda r_2)/ \partial r_2]d(\lambda r_2) =0.$

Astfel $d(\lambda r_1)/ d(\lambda r_2) = - [\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_2)] /[\partial Q(\lambda r)/ \partial(\lambda r_1)]$ care reprezintă panta izocuantei $\overline{\overline{Q}} = Q(\lambda r)$.

În final se obține relația: $d(\lambda r_1)/ d(\lambda r_2) = - (Q_2'/Q_1')$.

iv)**Teorema lui Euler**: Dacă funcția de producție Q(r) este omogenă de grad k şi diferențiabilă în orice punct $r\neq 0_m$ din domeniu atunci:

$$\sum_{i=1}^{m} [\partial Q(r)/\partial r_i]r_i = kQ(r).$$

(Relația de mai sus se obține derivând în raport cu λ ambii membrii ai expresiei din definiția funcției omogene de grad k.)

Se poate observa că pentru o funcție liniar omogenă outputul, Q(r) , este obținut prin însumarea după i a produsului producției marginale şi cantității din inputul i.

Funcții de producție omotetice

O funcție de producție se numeşte omotetică dacă poate fi scrisă ca o transformare a unei funcții omogene de grad 1 (i.e. Q(r) = H(q(r)), unde q(r) este funcție de producție omogenă de grad 1, iar H'>0 şi H(0)=0).

Se impun următoarele comentarii:

1) q(r) este o funcție de producție ce depinde de m inputuri;

2) H(q) este o funcție de producție ce depinde de un singur factor q;

3) O funcție omotetică este omogenă. Reciproca este falsă.
Pentru a privi comparativ aceste două tipuri de funcții de producție se impune studierea proprietăților reprezentative ale funcțiilor omotetice:
i)Elasticitatea scalei pentru o funcție omotetică este:
$\varepsilon(q) = [\partial H(q)/ \partial q]:[H(q)/ q]$.
Pentru deducerea acestei relații se porneşte de la definiția elasticității scalei pentru funcția de producție Q(r):
$\varepsilon(r) = [\partial Q(\lambda r)/ \partial\lambda]:[Q(\lambda r)/ \lambda] = [\partial H(q(\lambda r))/ \partial\lambda]:[H(q(\lambda r))/ \lambda]=$
$=[\partial H(q(\lambda r))/ \partial q(\lambda r)][\partial q(\lambda r)/ \partial\lambda]:[H(q(\lambda r))/ \lambda]=$
$=[\partial H(q(\lambda r))/ \partial q(\lambda r)][\partial q(\lambda r)/ \partial\lambda][\lambda/ q(\lambda r)][q(\lambda r)/ H(q(\lambda r)]$.
Dar $[\partial q(\lambda r)/ \partial\lambda][\lambda/ q(\lambda r)] = [\partial(\lambda^k q(r))/ \partial\lambda][\lambda/ \lambda^k q(r)] = [k\lambda^{k-1}q(r)][\lambda/ \lambda^k q(r)] = k=1$.
Deci $\varepsilon(q) = [\partial H(q)/ \partial q]:[H(q)/ q]$.
ii)Producția marginală în raport cu factorul r_i, pentru o funcție de producție omotetică Q(r) este:
$\partial Q(r)/\partial r_i = \partial H(q(r))/\partial r_i =[\partial H(q(r))/\partial q(r)][\partial q(r)/\partial r_i] =H'_q q'_i$.
iii) Panta izocuantei pentru o funcție de producție omotetică este dependentă numai de proporția inputurilor relative, fiind independentă de scala de producție.
Aplicând diferențiala totală pe izocuanta Q(r) = $\overline{Q}$, unde r = (r_1, r_2) se obține:
$d\overline{Q} = [\partial Q(r)/\partial r_1]dr_1+[\partial Q(r)/\partial r_2]dr_2=0 \quad \Leftrightarrow$
$dr_1/dr_2 = -[\partial Q(r)/\partial r_2]/[\partial Q(r)/\partial r_1] = - Q'_2/ Q'_1$.
Dar,
$- Q'_2/ Q'_1= - [(\partial H/\partial q) (\partial q/\partial r_2)]/ [(\partial H/\partial q) (\partial q/\partial r_1)] = - q'_2/ q'_1$
deci: $dr_1/dr_2 = - q'_2/ q'_1$.
Generalizând, pentru r = (r_1,…r_m), cu m>2, rezultă:
$dr_i/dr_j = - q'_j/ q'_i$, pentru r_k = cst., k≠i şi k≠j.
Astfel cele două izocuante – a funcției de producție liniare omogene q (r) şi a funcției omotetice Q(r) – sunt paralele, întrucât au aceeaşi pantă.

Funcții de producție multioutput
Activitatea economică reală presupune de cele mai multe ori un circuit continuu, în care unele bunuri sunt inputuri, altele outputuri şi de multe ori unele dintre acestea sunt considerate atât inputuri cât şi outputuri.
În consecință, formula funcției de producție nu va mai fi dată explicit, ci sub formă implicită.
În cazul funcțiilor de producție cu un singur output, avem: q = q(r) de unde q-q(r)=Q(r,q)=0.
Se consideră că n reprezintă numărul de bunuri constituite atât în inputuri cât şi în outputuri, iar $q = (q_1,\ldots q_n)^t$ – vectorul outputurilor nete. Semnul componentei q_i are următoarea semnificație:
- $q_i>0$ înseamnă că bunul i este un output net (se produce mai mult decât se consumă);
- $q_i<0$ presupune că bunul i este un input net;
- $q_i=0$ presupune că bunul i nu este nici input net, nici output net (sau nu se produce şinici nu se consumă, sau cât se produce se şi consumă).
Funcția de producție definită implicit, în cazul multioutputurilor,

este: $Q(q) = Q(q_1,\ldots,q_i,\ldots,q_n)$
Abordarea funcţiilor de producţie multioutput este pe cât de complexă pe atât de importantă.

1.3.4.Optimizarea deciziei consumatorului

O importanţă deosebită în fundamentarea deciziei optime la consumator este determinarea legităţilor ce descriu comportamentul consumatorului. Problema care apare este următoarea: **considerăm o economie în care se produc n bunuri şi alegem o categorie de consumatori ce dispun de venitul V şi doresc achiziţionarea bunurilor 1,...,n în cantităţile $x_1,..,x_n$ la preţurile de piaţă $p_1,...,p_n$ astfel ca satisfacţia acestora, măsurată prin funcţia de utilitate asociată, să fie maximă.**
Matematic:

$$\max U(x_1,..,x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = V \quad .$$

$$L(x,\lambda) = U(x_1,..,x_n) + \lambda\left(V - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$$

$$\nabla L(x,\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{array}{ll} U_{mg1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1} = \lambda p_1 & (1) \\ \ldots & \\ U_{mgn} = \dfrac{\partial U}{\partial x_n} = \lambda p_n & (n) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = V & (n+1) \end{array}$$

Împărţind primele n-1 relaţii la relaţia n obţinem

$$: \frac{U_{mg1}}{p_1} = \ldots = \frac{U_{mgn}}{p_n} = \lambda \, .$$

Astfel condiţia necesară de optim pentru fundamentarea deciziei optime a consumatorului este ca utilităţile marginale să fie direct proporţionale cu preţurile bunurilor. Valoarea comună a rapoartelor este egală cu multiplicatorul Lagrange ataşat restricţiei de buget.
O altă proprietate care se deduce: RMS este egală cu raportul preţurilor bunurilor.
Rezolvând sistemul obţinem funcţiile de cerere de bunuri: $x_j^* = D_j(p_1,\ldots,p_n,V) \quad j = \overline{1,n}$

Asociem $\Phi(x) = L(x,\lambda^*) = U(x_1,..,x_n) + \lambda^*\left(V - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$.

Pentru ca punctul x^* să fie punct de maxim trebuie ca matricea hessiană a funcţiei auxiliare $\Phi(x)$ calculată în punctul x^* să fie negativ definită. Aceasta este echivalent cu faptul că matricea hessiană a funcţiei de utilitate calculată în punctul x^* trebuie să fie negative definită.
Deducem de aici că o condiţie suficientă de optim pentru

fundamentarea deciziei optime a consumatorului este ca funcția de utilitate să fie normală (să se subscrie legii randamentelor marginale descrescătoare).

Aplicație practică 1 - rezolvare

Considerăm un consumator a cărui funcție de utilitate este:
$U(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1 - 2) + \beta \ln(x_2 - 1)$, acesta dispunând de bugetul V pentru cumpărarea bunurilor 1 şi 2 în cantitățile x_1 şi x_2 la prețurile de piață p_1 şi p_2. Determinați combinația optimă a bunurilor de consum. Caracterizați bunul 1 calculând indicatorii cererii marginale.

Soluție. Modelul matematic asociat problemei este:

$$\max U(x_1, x_2) = \alpha \ln(x_1 - 2) + \beta \ln(x_2 - 1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V$$

Funcția Lagrange asociată:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \alpha \ln(x_1 - 2) + \beta \ln(x_2 - 1) + \lambda(V - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

Din $\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = 0$ obținem

$$U_{mg1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = \frac{\alpha}{x_1 - 2} = \lambda p_1 \quad (1)$$

$$U_{mg2} = \frac{\partial U}{\partial x_2} = \frac{\beta}{x_2 - 1} = \lambda p_2 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i x_i = V \quad (3)$$

Împărțind relația 1 la relația 2 găsim $\frac{\alpha(x_2 - 1)}{\beta(x_1 - 2)} = \frac{p_1}{p_2}$. Deci

$$x_2 = 1 + \frac{p_1 \beta (x_1 - 2)}{p_2 \alpha} \quad (4).$$

Introducem (4) în (3) si deducem funcția de cerere a bunului 1:

$$x_1^* = D_1(p_1, p_2, V) = \frac{\alpha(V - p_2)}{(\alpha + \beta) p_1} + \frac{2\beta}{(\alpha + \beta)} \quad (5).$$

Folosind (5) în (4) găsim funcția de cerere a bunului 2 :

$$x_2^* = D_2(p_1, p_2, V) = \frac{\beta(V - 2p_1)}{(\alpha + \beta) p_2} + \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \quad (6).$$

În plus $\lambda^* = \frac{(\alpha + \beta) p_1}{\beta(V - p_2 - 2p_1)} > 0$ - valoarea multiplicatorului Lagrange.

Asociem $\Phi(x) = L(x, \lambda^*) = U(x_1, x_2) + \lambda^* \left(V - \sum_{i=1}^{2} p_i x_i \right)$

Pentru ca punctul x^* să fie punct de maxim trebuie ca matricea hessiană a funcției auxiliare $\Phi(x)$ calculată în punctul x^* să fie negativ definită. Aceasta este echivalent cu faptul că matricea hessiană a funcției de utilitate calculată în punctul x^* trebuie să fie negativ definită.

Obținem $H_U\left(x^*\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{\alpha}{\left(\mathbf{x}_1^*-2\right)^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\beta}{\left(\mathbf{x}_2^*-1\right)^2} \end{pmatrix}$ care este negativ definită dacă $\alpha > 0$ şi $\beta > 0$.

Pentru caracterizarea bunului 1 calculăm indicatorii cererii marginale :

- CMD (**Cererea marginală directă**) este dată de $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_1}$ şi reflectă variația cererii bunului 1 în funcție de variația pe piață a prețului propriu p_1.

Dacă CMD<0 atunci bunul analizat, bunul 1, este bun normal; dacă CMD>0 atunci bunul 1 este bun anormal.

Astfel $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_1}=-\dfrac{\alpha(V-p_2)}{(\alpha+\beta)p_1^2}<0$, adică o creştere a prețului bunului 1 induce o diminuare a cererii acestui bun, de unde bunul 1 este bun normal.

- CMI (**Cererea marginală încrucişată**) este dată de $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_2}$ şi reflectă variația cererii bunului 1 în funcție de variația pe piață a prețului de substituție p_2. Dacă CMI<0 atunci bunurile 1 şi 2 sunt complementare; dacă CMI>0 atunci bunurile 1 şi 2 sunt substituibile.

Astfel $\dfrac{\partial D_1}{\partial p_2}=-\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)p_1}<0$, adică o creştere a prețului bunului 2 induce o diminuare a cererii bunului 1, de unde bunurile sunt complementare.

- CMV (**înclinația marginală spre consum** sau propensiunea marginală a consumului bunului 1) este dată de $\dfrac{\partial D_1}{\partial V}$ şi reflectă variația cererii bunului 1 când cresc sau scad veniturile consumatorului. Dacă CMV<0 atunci bunul analizat, bunul 1, este bun inferior; dacă CMV>0 atunci bunul 1 este bun superior. Din $\dfrac{\partial D_1}{\partial V}=\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)p_1}>0$, adică o creştere a venitului induce o creştere a cererii acestui bun, de unde bunul 1 este bun superior.

Pentru a completa analiza pot fi calculați şi indicatorii de elasticitate.

- ECD (**elasticitatea directă preț – cerere**) este dată de $\dfrac{\frac{\partial D_1}{\partial p_1}}{\frac{D_1}{p_1}}$ şi comensurează variația relativă (%) a cererii bunului (serviciului) 1 consecutiv variației relative (%) a prețului propriu. Evident induce aceeaşi caracterizare a bunului 1 precum indicatorul marginal asociat.

Pentru exemplul propus:

$$\text{ECD} = \frac{\dfrac{\partial D_1}{\partial p_1}}{\dfrac{D_1}{p_1}} = -\frac{1}{1 + \dfrac{2\beta p_1}{\alpha\left(V - p_2\right)}} \in \left(-1{,}0\right)$$

rezultând cererea inelastică la preț (la o modificare a prețului propriu cantitatea se modifică dar mai lent).

- ECI (**elasticitatea încrucişată preț – cerere**) este dată de $\dfrac{\dfrac{\partial D_1}{\partial p_2}}{\dfrac{D_1}{p_2}}$ şi comensurează variația relativă (%) a cererii bunului (serviciului) 1 consecutiv variației relative (%) a prețului bunului 2.

Pentru exemplul propus $\text{ECI} = \dfrac{\dfrac{\partial D_1}{\partial p_2}}{\dfrac{D_1}{p_2}} = -\dfrac{1}{\dfrac{\alpha\left(V - p_2\right) + 2\beta p_1}{\alpha p_2}} < 0$

rezultând cererea inelastică la prețul de substituție.

- ECV (**elasticitatea cerere - venit**) este raportul dintre propensiunea marginală şi cea medie pentru produsul (serviciul 1) şi comensurează variația relativă (%) a cererii bunului (serviciului) 1 consecutiv variației relative (%) a venitului.

Pentru exemplul propus: $\text{ECV} = \dfrac{\dfrac{\partial D_1}{\partial V}}{\dfrac{D_1}{V}} = \dfrac{1}{\dfrac{\alpha\left(V - p_2\right) + 2\beta p_1}{\alpha V}} > 0$ .Numeric, pentru $\alpha = 0{,}5$; $\beta = 0{,}5$; $p_1 = 1$; $p_2 = 2$; V=100 obținem:

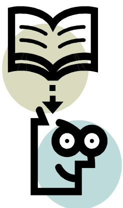
$x_1^* = 50$, $x_1^* = 25$, $U_{max}^* = 0{,}5\ln 2$; ECD = -0,98; ECI = -0,02; ECV = 1 (cerere unitară).

Unitatea de învăţare 2

Analiza economico-matematică a unor modele liniare

2.1. Introducere

Problemele de optimizare au fost formulate încă de Euclid, dar numai după dezvoltarea calculului diferenţial şi a calculului variaţiilor în secolele 17 şi 18, s-a creat un aparat matematic pentru rezolvarea unor astfel de probleme.
Termenul de Cercetare Operaţională a fost utilizat pentru prima dată în 1939, primele cărţi apărând abia după 1950, cînd a început să devină obiect de studiu în universităţi[5]. Analiza diferitelor concepte ale activităţii economice cu ajutorul metodelor matematice este cunoscută sub denumirea de *programare matematică*.



2.2. Obiectivele şi competenţele unităţii de învăţare

Obiectivele unităţii de învăţare:

Însuşirea unor noţiuni şi concepte din domeniul matematicilor speciale, concepte dedicate şi utile în tratarea fenomenelor de natură economică şi managerială.

Competenţele unităţii de învăţare:

Rezolvarea unor probleme de optimizare (problematica de programare liniară – algoritmi "Simplex" şi "problema de transport"). Aplicaţii specifice cum ar fi: achiziţionare optimă, investiţii optime, repartizare optimă de resurse (prezentare matematică şi rulare modele pe calculator).

[5] http://www.orms-today.org/orms-10-02/frhistorysb1.html

2.3. Conținutul unității de învățare

2.3.1.Formularea unei probleme de programare liniară şi modelul său mathematic

Condițiile în care se desfăşoară activitatea analizată conduc la un sistem de relații - ecuații sau inecuații - care cuprind variabilele problemei şi coeficienții tehnici care o caracterizează. Aceste relații alcătuiesc *restricțiile* problemei. Obiectivul studiului este optimizarea unui anumit rezultat dependent de aceleaşi variabile care figurează şi în restricții. În formularea problemelor de programare matematică, obiectivul apare sub forma unei funcții ale cărei valori maxime sau minime le căutăm şi care se numeşte *funcțieobiectiv*, funcție *scop* sau *funcțiedeeficiență*. Restricțiile problemei împreună cu funcția obiectiv constituie modelul matematic al problemei de programare matematică. Dacă atât sistemul restricțiilor cât şi funcția obiectiv sunt funcții liniare de variabilele problemei, modelul constituie o problemă de programare liniară care poate fi scrisă sub formă algebrică, vectorială sau matriceală. Sub forma cea mai generală, modelul algebric al problemelor de programare liniară este următorul:

$$\max(\min) f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,,\; i=\overline{1,k} \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \,,\; i=\overline{k+1,p} \quad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \,,\; i=\overline{p+1,m} \quad (4)$$

$$x_j \ge 0,\; j=\overline{1,n} \qquad (5)$$

Relația (1) exprimă matematic scopul sau obiectivul studiului întreprins şi arată evaluarea prin coeficienții $c_j\,(j=\overline{1,n})$ - care pot fi *costuriunitare* în cazul problemelor de minim, sau *profituriunitare*, respectiv prețuri sau tarife în cazul problemei de maxim - evaluare a volumului activităților desfăşurate la nivelurile $x_1,\ldots,x_n$ de către agentul economic.

Relațiile (2), (3) şi (4) constituie sistemul restricțiilor şi reflectă cerințe tehnico - economice de desfăşurare a activității, cerințe de plan, de piață, de încadrare în normativele legislative existente. Coeficienții a_{ij} se numesc coeficienți tehnico - economici (normative economico - financiare) şi sunt stabiliți pe baza observării fenomenului studiat.

Dacă aceşti coeficienți sunt şi rămân constanți într-un interval de

timp determinat, avem de studiat o problemă de *programareliniară*. Dacă însă coeficienții tehnici variază şi aceste variații pot fi exprimate ca funcții de unul sau de mai mulți parametri, modelul corespunde unei probleme de *programareparametrică*.
În numeroase cazuri, coeficienții tehnici sunt variabile aleatoare şi atunci problema propusă este o problemă de *programarestocastică*.
Termenii liberi (b_i) cuantifică resursele disponibile materiale, financiare, de forță de muncă, capacitățile de producție etc., sau normative minimale ce trebuie atinse, capacitatea minimă de absorbție a pieței etc. Sub acest aspect, restricțiile (2) corelează volumul consumului generat de activitățile desfăşurate la nivelul programat $x_1,\ldots,x_n$, cu volumul disponibilului din fiecare resursă (b_i); restricțiile (3) impun încadrarea volumului de activitate în diversele limite minimale (b_i) - limite date de piață, de normative tehnico - economice etc.; restricțiile (4) - impun realizarea strictă a plafonului dat (b_i). Condiția (5) constituie obligativitatea de nenegativitate a variabilelor, condiție logică din cauza sensului economic al problemelor de programare matematică. Variabilele $x_j$reprezentând nivelul la care trebuie desfăşurate activitățile $j = \overline{1,n}$, devine evident că nici o activitate nu poate fi desfăşurată la un nivel negativ.
A rezolva o problemă de programare înseamnă a determina valorile nenegative ale variabilelor x_j care satisfac restricțiile (2), (3) şi (4) şi care optimizează - fac maximă sau minimă - funcția obiectiv, sau altfel spus, rezolvarea problemei comportă determinarea nivelurilor $x_j$la care trebuie să se desfăşoare diferitele activități, astfel încât eficiența economică a întregului plan de activitate să fie optimă.
Pentru a clarifica cele expuse, este necesar un exemplu.
Să luam în considerare următoarea problemă decizională de la magazinul firmei Z. Să presupunem că firma Z poate produce marfă de calitate superioară ori de calitate medie. Variabilele decizionale sunt date de numărul convențional de marfă din săptămâna curentă. Vom nota aceste variabile ca fiind x_1 si x_2. Acum să presupunem că Z poate vinde marfa de calitate superioară pentru 13 u.m. , dar pentru asta trebuie să cumpere materie primă de 10 u.m. şi să cheltuie încă 1 u.m. ceea ce înseamna un profit de 2 u.m. Calculând la fel pentru produse de calitate medie reiese un profit de 1,7 u.m. Managerul firmei Z a calculat că fabrica sa nu poate produce mai mult de 12 produse într-o săptămână. Astfel, a angajat 7 oameni incluzându-l şi pe el, ce vor lucra 8 ore pe zi, 5 zile pe săptămână şi a estimat de asemenea că un produs de calitate superioară necesită 25 de ore de muncă în timp ce unul de calitate medie 20 de ore.
Pentru a rezolva problema firmei Z trebuie să asociem modelul matematic corespunzător. De vreme ce profitul estimat pentru produsele de calitate superioară este de 2 u.m., atunci 2000 x_1 este profitul total dat de aceste produse. Similar $1,7x_2$ este profitul total dat de produsele de calitate medie. Profitul total va fi $2x_1+1,7x_2$. Această ecuație descrie profitul total al firmei Z în funcție de variabilele decizionale.
Având în vedere că managerul firmei Z urmăreşte realizarea unui profit maxim, obiectivul său este să determine nivelul fiecărei variabile decizionale în acest context, astfel max $Z = 2x_1+1,7x_2$
Aceasta este funcția obiectiv a problemei de programare liniară

asociată.
Fabrica Z a limitat capacitatea şi resursele sale. În acest caz capacitatea şi resursele sunt elemente care limitează valorile admisibile ale variabilelor decizionale. Deoarece variabilele decizionale sunt definite în termeni convenționali, într-o săptămână producția totală este x_1+x_2. Această sumă trebuie să fie mai mică sau egală cu capacitatea disponibilă (12). Uzul total al resurselor este dat de $25x_1 + 20x_2$, ceea ce trebuie să fie mai mic sau egal decât resursele disponibile(280). Aceste două limite se numesc constrângeri. În final, nu are sens să prelucrăm un număr negativ de produse şi astfel x_1 şi x_2 sunt presupuse mai mari sau egale cu zero. Transferând în limbaj matematic cele de mai sus, problema firmei Z este de a determina valorile lui x_1 şi x_2 astfel încât: $\max Z = 2x_1 + 1{,}7x_2$

$x_1 + x_2 \leq 12$

$25x_1 + 20x_2 \leq 280$

$x_1, x_2 \geq 0$

Acesta este modelul matematic asociat problemei firmei Z, având în vedere deciziile ce trebuie luate.
Această formulare identifică de asemenea regulile, numite în mod obişnuit restricții sau constrângeri, în funcție de care se ia decizia.
Aşa cum am mai spus, nu toate problemele de programare liniară prezintă forma de mai sus. Altele ar fi următoarele:

1) Obiective care presupun minimizarea în locul formelor de maxim

$$\min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

2) Elemente care sunt mai mari sau egale în loc să fie mai mici sau egale

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_1$$

3) Elemente care sunt doar egalități

$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_1$

4) Variabilele fără condiție non-negativă .
5) Variabilele necesare să fie non-pozitive $x_j \leq 0$.

Ipoteze asupra funcției obiectiv

a) Funcția obiectiv este o expresie liniară în variabilele de decizie.
b) În problemele de programare liniară unicriterială, reflectă singurul obiectiv urmărit pedomeniul definit de restricții economice şi tehnologice.

Satisfacerea acestor ipoteze poate fi uneori dificilă, de exemplu, firma Z nu urmăreşte numai maximizarea profitului, ci şi minimizarea riscului, optimizarea timpul liber etc. Apare astfel caracterul multicriterial al problemei de programare liniară, cât şi problema modelării riscului.

Ipoteze asupra variabilelor decizionale

a) Variabilele decizionale măsoară intensitatea activităților sau nivelele pe care le poateatinge o activitate, sunt definite complet pe domeniul admisibil, iar asupra lor decidentul poate exercita un anumit control în vederea realizării obiectivului propus.
b) Toate variabilele semnificative au fost incluse în model.

Ipoteze asupra restricțiilor

a) Prin restricții înțelegem un sistem de relații sub forma unor expresii liniare – inegalități şi/ sau egalități – în variabilele de decizie, care verifică axiomele de liniaritate.

b) Resursele folosite şi/sau solicitate în cadrul unei singure restricții sunt omogene, şi pot fi folosite sau cerute de oricare variabilă decizională apărută în acea constrângere.

c) Variabilele din model se presupune că trebuie să se subscrie proporționalității. Cantitatea consumată din fiecare resursă este direct proporțională cu volumul producției fabricate. În plus, resursele sunt independente între ele şi, ca urmare, consumurile din fiecare resursă nu se condiționează reciproc. (De exemplu în problema generală de programare liniară, profitul net pe unitatea de produs x_j este c_j. Folosind această presupunere contribuția totală a lui x_j la funcția obiectiv este întotdeauna proporționala cu nivelul său.)

Revenind la modelul menționat mai sus, timpul necesar firmei Z pentru realizarea produselor de calitate superioară era de 25 ore pe produs. Dacă sunt obținute 10 produse de calitatea menționată, sunt necesare 250 de ore de unde rezultă că numărul orelor alocate realizării producției este întotdeauna proporțional cu nivelul produselor fabricate.

Se întâlnesc câteva tipuri de probleme în care ipoteza de proporționalitate este încălcată. În anumite contexte, prețul produselor depinde de nivelul de producție. Astfel, contribuția pe unitate a fiecărui produs variază cu nivelul de activitate. Un alt caz apare atunci când trebuie incluse în model şi costurile fixe. (Să presupunem că trebuie să asociem un cost fix unei variabile nenule. În acest caz costul total pe unitate nu este constant.)

Ipoteza de divizibilitate

Formularea problemei impune faptul că toate variabilele decizionale pot lua orice valoare non-negativa incluzand pe cele fracționare.

Aceasta ipoteză este încălcată atunci când anumite valori neîntregi ale variabilelor decizionale nu pot fi atinse. O variabilă decizională poate fi de exemplu un mijloc de transport sau construirea unei clădiri când este clar că variabila trebuie să ia valori întregi. În acest caz este indicat să folosim programarea cu numere întregi.

Forma matriceală generală a PPL

Dacă notăm vectorul necunoscutelor cu x şi cel al costurilor (profiturilor) cu c, avem $x = (x_1,\ldots,x_n)^T$, $c = (c_1,\ldots c_m)$ şi matricea coeficienților tehnico-economici a_{ij}, cu $A = (a_{ij})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, iar vectorul termenilor din membrul drept al restricțiilor cu $b=(b_1,\ldots,b_m)^T$, obținem **forma matriceală generală** a (PPL):

$$\max(\min) f = cx \qquad (1)'$$
$$Ax \le b \; (Ax \ge b) \qquad (2)'$$
$$x \ge 0 \qquad (3)'$$

Observație. Dacă se partiționează matricea $A=(a_{ij})$ în blocurile de matrice $A_1 \in M(k,n),\ A_2 \in M(p-k,n),\ A_3 \in M(m-p,n),$

forma generală a modelului (PPL) se scrie:

$\max(\min) f = cx$ (1)"

$A_1 x \le b^{(1)}$ (2)"

$A_2 x \ge b^{(2)}$ (3)"

$A_3 x = b^{(3)}$ (4)"

$x \ge 0$ (5)"

Unde $b^{(1)}$, $b^{(2)}$, $b^{(3)}$ sunt blocurile vectorului coloană b corespunzătoare dimensiunilor matricelor A_1, A_2, A_3, deci pentru restricții de tip $\le, \ge, =$.

Forma canonică a PPL

Dacă restricțiile (PPL) sunt toate *de acelaşi sens* ($\le$) *sau* ($\ge$), spunem că modelul matematic are forma canonică:

$$\begin{aligned} &\max f = cx \\ &Ax \le b \\ &x \ge 0 \end{aligned} \quad \text{şi} \quad \begin{aligned} &\min f = cx \\ &Ax \ge b \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

Aşadar, există două expresii ale modelului (PPL) sub formă canonică şi anume: pentru problemele de maxim restricțiile trebuie să fie ($\le$) şi variabilele nenegative; pentru minim, restricțiile sunt ($\ge$) şi este respectată condiția de nenegativitate a variabilelor. Aceste cerințe sunt necesare întrucât, dacă problema ar fi de maxim şi forma canonică ar avea restricții de tip $\ge$, atunci soluția ar fi infinită ($x_j = +\infty, j = \overline{1,n}$), similar, pentru problema de minim, dacă restricțiile ar fi, în forma canonică, de tip ($\le$), atunci soluția ar fi x = 0.

Vom spune că o restricție a unei probleme de programare liniară este concordantă dacă este o inegalitate de tipul ($\ge$), când funcția obiectiv se minimizează şi o inegalitate de tipul ($\le$), când funcția obiectiv se maximizează.

2.3.2.Algoritmul simplex

Modelele de rezolvare a problemelor de programare liniară sunt diferite de cele din analiza matematică pentru problemele de extreme cu legături. Ele țin seama de particularitățile modelului liniar.

Matematicianul G.B. Dantzig[6] a intuit şi realizat un algoritm iterativ de căutare a soluției optime pornind de la o soluție admisibilă de bază inițială care este îmbunătățită, prin trecerea la altă soluție admisibilă de bază, mai bună. Mai precis, vor fi testate o parte din soluțiile admisibile de bază. În mod empiric, pe baza unor experiențe de calcul efectuate timp de zece ani, s-a stabilit că soluția optimă, dacă există, se obține după cel mult 3m iterații (m este rangul matricei A)

Pentru prezentarea algoritmului simplex se va folosi forma standard a (PPL), adică:

minf = cx

(1) $\begin{cases} Ax = b & (b \ge 0) \\ x \ge 0 \end{cases}$

Nu contează dacă modelul este de minim sau de maxim, conform

[6] http://www.stanford.edu/group/SOL/GBD/GBDandSOL.pdf

relației:
minf = - max(-f)
Presupunem că, coloanele a_1, a_2, …, a_n ale matricei A au indicii j = 1, …, n aparținând mulțimii J_B sau J_S de indici, după cum variabilele corespunzătoare sunt variabile de bază, sau sunt variabile secundare, respectiv.
Deci, $J_B \cup J_S = \{1,2,...,n\}, J_B \cap J_S = \varnothing$.
Fie B o bază formată din m coloane ale lui A.
Sistemul Ax=b devine $Bx^B+Sx^S=b$, de unde:
$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Sx^S$
Notăm $\bar{x}^B = B^{-1}b; y_j^B = B^{-1}a_j, j \in J_S$
Atunci: $x^B = \bar{x}^B - \sum_{j\in J_S} y_j^B x_j$, sau pe component

$$x_i = \bar{x}_i^B - \sum_{j\in J_S} y_{ij}^B x_j, i \in J_B$$

O soluție de bază se poate obține pentru $x^S = 0$ deci $\bar{x}^B = B^{-1}b$.
O soluție de bază $\bar{x}^B = B^{-1}b$ este admisibilă dacă $\bar{x}^B \geq 0$.
O bază B ce verifică o astfel de condiție se numeşte bază primal admisibilă.
Exprimăm funcția obiectiv cu ajutorul variabilelor secundare.
Partiționând corespunzător vectorul c al coeficienților funcției obiectiv obținem:

$$f = cx = c^B x^B + c^S x^S = \sum_{j\in J_B} c_i x_i + \sum_{j\in J_S} c_j x_j = \sum_{i\in J_B} c_i (\bar{x}_i^B - \sum_{j\in J_S} y_{ij}^B x_j) + \sum_{j\in J_S} c_j x_j =$$

$$= \sum_{i\in J_B} c_i \bar{x}_i^B - \sum_{j\in J_S} (-c_j + \sum_{i\in J_B} c_i y_{ij}^B) x_j$$

Notăm:

$$\bar{z}^B = \sum_{i\in J_B} c_i \bar{x}_i^B = c^B \bar{x}^B$$

şi

$$z_j^B = \sum_{i\in J_B} c_i y_{ij}^B = c^B y_j^B, j \in J_S$$

$$f = \bar{z}^B - \sum_{j\in J_S} (z_j^B - c_j) x_j$$

Teorema 1. Dacă B este o bază primal admisibilă şi pentru orice $j \in J_S$ avem $z_j^B - c_j \leq 0$, atunci programul de bază corespunzător bazei B ($\bar{x}^B = B^{-1}b, x^S = 0$) este un program optim pentru problema (1).

Teorema 2. Dacă pentru o bază primal admisibilă B au loc următoarele condiții:

- $(\exists) k \in J_S$ astfel încât $z_k^B - c_k \rangle 0$

➢ programul de bază $x^B = B^{-1}b, x^S = 0$ este nedegenerat, atunci programul de bază corespunzător lui B nu este optim.

Teorema 3. Dacă pentru o bază primal admisibilă B au loc următoarele condiţii:

➢ $\exists k \in J_S$ astfel încât $z_k^B - c_k \rangle 0$

➢ programul de bază $x^B = B^{-1}b,\ x^S = 0$, este nedegenerat

➢ $y_{ik} \leq 0, \forall i \in J_B$

atunci problema (1) are optimul infinit.

Teorema 4. Dacă pentru o bază primal admisibilă B au loc următoarele condiţii:

➢ $\exists k \in J_S$ astfel încât $z_k^B - c_k \rangle 0$

➢ programul de bază $x^B = B^{-1}b, x^S = 0$ este nedegenerat

➢ $(\exists) i \in J_B$ astfel încât $y_{ik} \rangle 0$ atunci valoarea maximă pe care o putem atribui lui x^0 astfel încât x' să rămână program este dată de:

$$\theta_{\min} = \min_{\substack{i \in J_B \\ y_{ik} \rangle 0}} \left(\frac{\bar{x}_i^B}{y_{ik}^B}\right) = \frac{\bar{x}_r^B}{y_{rk}^B} \qquad (2)$$

Dacă atribuim lui x_k^0 această valoare atunci programul corespunzător lui x este chiar o soluţie de bază. Aceasta corespunde unei baze B' care se obţine din B prin înlocuirea coloanei a_r cu coloana a_k.

Observaţie. Conform formulei $f' = \bar{z}^B - (z_k^B - c_k)x_k^0$ valoarea funcţiei obiectiv corespunzătoare bazei B' este

$$\bar{z}^{B'} = \bar{z}^B - (z_k^B - c_k)\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \quad (3)$$

Dacă există mai mulţi indici k cu proprietatea $z_k - c_k \rangle 0$ atunci pentru a obţine cea mai mică valoare a funcţiei obiectiv ar trebui ales acel indice k pentru care cantitatea ce se scade în relaţia (3) să fie maximă. Deoarece calculele sunt suficient de laborioase se alege în practică acel indice ce maximizează expresia $z_j^B - c_j$.

2.3.2.1.Algoritmul simplex primal

Din paragraful anterior obţinem algoritmul simplex care constă în:

➢ se determină o bază primal admisibilă B (metodă ce va fi expusă

ulterior) şi se calculează $\bar{x}^B, \bar{z}^B$, $y_j^B, z_j^B - c_j$.

➢ dacă există indici j astfel încât să avem $z_j^B - c_j \rangle 0$ atunci se determină

vectorul coloană a_k ce intră înbază folosind proprietatea de maximizare a expresiei $z_j^B - c_j$.

În cazul când maximul se atinge pentru mai mulţi indici, se alege unul dintre aceştia.

Dacă pentru toţi indicii $j \in J_S$ avem $z_j^B - c_j \leq 0$ atunci programul de bază $x^B = \bar{x}^B$, $x^S = 0$ este optim.

- dacă mulțimea indicilor $i \in J_B$ cu proprietatea că $y_{ik} \rangle 0$ este nevidă,

atunci se determină vectorul coloană ce părăseşte baza folosind relația (2). Dacă mulțimea de indici este vidă, deci $y_{ik} \le 0, (\forall) i \in J_B$, problema are optim infinit.

- se înlocuieşte în baza B vectorul a_r cu a_k determinându-se noua bază B'

şi se recalculează cantitățile de la punctul 1) în noua bază.

- se reia algoritmul de la punctul 2) până la determinarea soluției.

2.3.2.2.Determinarea unei soluții de bază inițiale

Se întâlnesc două situații:

- dacă problema este de maxim, sub formă canonică, baza inițială este baza $B_0 = I_m$ formată din vectorii coloană ataşați *variabilelor auxiliare* adăugate pentru aducerea la forma standard.
- în caz contrar, baza inițială se va construi cu ajutorul unor variabile, numite *artificiale*, adăugate la restricțiile care nu conțin vectorii unitari ai bazei inițiale.

I)Existența unei baze inițiale prin aducerea la forma standard

Fie (PPL)

maxf = cx

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ forma standard: } \begin{cases} \max\ f = cx + 0 \cdot y \\ Ax + I_m y = b \\ x \ge 0,\ y \ge 0 \end{cases}$$

În noua problemă, matricea tehnologică $\bar{A} = (A / I_m)$ conține vectorii de bază inițială $B_0 = I_m$. Se aplică în continuare ASP.

II) Construirea unei baze inițiale artificiale

Dacă (PPL) nu este de forma dată în situația I) - deci are forma generală sau canonică, dar (PPL) este de minim, atunci prin aducerea la forma standard nu se mai obține o bază inițială.

Procedăm astfel: la restricția care nu conține vectorul unitar (adică în matricea $\bar{A}$ nu apare vectorul coloană $(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T$ cu 1 pe linia restricției respective) se adaugă *variabila artificială* $u_i \ge 0$, care în funcția obiectiv va fi trecută cu o *penalizare* foarte mare, M > 0, cu semnul (+) dacă problema este de minim şi cu semnul (-) dacă problema este de maxim. După înscrierea datelor în tabelul simplex se efectuează calculele după

etapele specificate la ASP, luând M suficient de mare (mai mare decât oricare din "costurile" problemei).

Prezența în funcția obiectiv a variabilelor artificiale înseamnă, din punct de vedere economic, o diminuare a profitului, în caz de maximizare, sau o suplimentare a cheltuielilor, în caz de minimizare, deci, o penalizare în ambele cazuri.

De aici şi denumirea de metoda penalizării dată acestei metode[7].

Fie astfel (PPL) sub forma generală adusă la forma standard.

[7]În literatura engleză, această metodă este numită **The Big –M Method**.

Matricea $\bar{A}$ a formei standard este $\bar{A}=\begin{pmatrix} A_1 & I_m & 0 \\ A_2 & 0 & -I_{p-k} \\ A_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in M_{m,n+p}$

Observăm că are vectori unitate pe coloanele corespunzătoare lui I_m, deci pentru variabila auxiliară $y^{(1)}$, dar nu şi pentru ultimele restricţii corespunzătoare matricelor A_2 şi A_3.
La aceste restricţii adăugăm variabilele artificiale $u_1, \dots, u_{m-k}$, modelul matematic dat devine, de exemplu pentru *maxim*:

$$\max f = cx + 0\cdot y^{(1)} - 0\cdot y^{(2)} - M(u^{(1)} + u^{(2)}) \qquad (1''')$$

$$\begin{cases} A_1 x + I_k \cdot y^{(1)} = b^{(1)} \\ A_2 x - I_{p-k}\cdot y^{(2)} + \mathrm{I}_{p-k}\cdot u^{(1)} = b^{(2)} \\ A_3 x + I_{m-p}\cdot u^{(2)} = b^{(3)} \\ \mathrm{x}\ge 0, \mathrm{y}^{(1)} \ge 0, \mathrm{y}^{(2)} \ge 0, u \ge 0 \end{cases}$$

şi analog pentru minim, dar în (1''') se ia $+M(u^{(1)}+u^{(2)})$, unde
$u^{(1)} = (u_1, \dots, u_{p-k})^t$, $u^{(2)} = (u_{p-k+1}, \dots, u_{m-k})^t$.
Scriind matricea modelului (1''') - (5'''), se constată existenţa unei baze iniţiale unitare, practic baza artificială formată din vectorii corespunzători variabilelor artificiale. În acest caz situaţia optimului infinit nu poate apare.
După aplicarea ASP, apar următoarele situaţii:
- Valoarea optimă a expresiei $M(u^{(1)}+u^{(2)})$ este zero şi nici unul din vectorii artificiali nu se află în baza optimă.
- Valoarea optimă a expresiei $M(u^{(1)}+u^{(2)})$ este zero şi cel puţin unul din vectorii artificiali se află în baza optimă. În această situaţie, soluţia optimă pentru problema originară este degenerată.
- Valoarea optimă a expresiei $M(u^{(1)}+u^{(2)})$ este strict pozitivă. În acest caz problema iniţială nu are soluţii.

2.3.3.Dualitatea în programarea liniară

Dualitatea ocupă un loc important în programarea liniară atât din punct de vedere matematic, cât mai ales din punct de vedere economic.
Fiind dată o problemă de programare liniară, prin care se cere să se determine valoarea optimă a funcţiei respective de eficienţă, variabilele fiind supuse unor restricţii, totdeauna se poate formula o nouă problemă de programare liniară, folosind în mod organizat aceleaşi caracteristice numerice ale problemei date, care să ceară însă determinarea valorii optime de categorie contrară. În plus, soluţiile celor două probleme sunt strâns legate între ele.
Perechea de probleme astfel obţinută răspunde unui principiu fundamental din matematică numit principiul dualităţii, problemele respective fiind numite probleme duale una alteia.
Importanţa problemelor duale este evidentă atât din punct de vedere teoretic, prin aceea că oferă posibilitatea dezvoltării constructive a obiectului programării liniare, cât şi din punct de vedere practic, permiţând analiza cantitativă şi calitativă a problemelor concrete de programare liniară. Interpretarea economică a modelului dual aduce noi informaţii în analiza acestor fenomene şi în fundamentarea deciziilor.

2.3.3.1.Formularea PPL - duale. Teorema fundamentală a dualității

Teoria dualității studiază cuplul de probleme duale din punctul de vedere al conexiunilor care se pot stabili între mulțimile soluțiilor celor două probleme şi implicațiile acestora asupra modului de rezolvare.
Legătura dintre cele două modele duale este redată după cum urmează:
- forma funcției obiectiv din primală implică forma funcției obiectiv din duală, în sensul că dacă modelul primal este de minim (maxim), atunci dualul său va fi de maxim (minim), iar coeficienții acestei funcții vor fi termenii liberi ai restricțiilor primalei şi reciproc;
- forma restricțiilor din primală implică semnele variabilelor din duală şi reciproc, astfel:
  - ➢ unei restricții concordante cu modelul primal i se ataşează variabilă duală, care va avea condiție de nenegativitate şi reciproc;
  - ➢ unei restricții neconcordante în primală îi va corespunde o variabilă duală ce nu va avea condiție de nenegativitate şi reciproc;
  - ➢ unei restricții dată de o egalitate îi va corespunde o variabilă duală oarecare şi reciproc.
- termenii liberi ai restricțiilor din modelul dual sunt coeficienții funcției obiectiv a modelului primal;
- semnele variabilelor din primală implică sensul restricțiilor din duală, după cum rezultă din implicația reciprocă a celor trei reguli ale punctului ii).

Din aceste reguli rezultă că modelul dual va avea m necunoscute $w=(w_1,w_2,\ldots, w_m)$ şi n restricții, cu matricea sistemului A^T (transpusa matricei A a sistemului de restricții din modelul primal).

Propoziția 1. $(\forall)\bar{x} \in P_x$ şi $\bar{w} \in P_w$, un cuplu $(\bar{x}, \bar{w})$ de soluții admisibile ale celor două probleme, avem inegalitatea:

$g(\bar{w}) \le f(\bar{x})$ deci $\bar{w}b \le c\bar{x}$

Propoziția 2. Dacă cuplul de soluții $(\tilde{x}, \tilde{w})$ ale celor două probleme are proprietatea că $g(\bar{w}) = f(\tilde{x})$, atunci $\tilde{x}$ este o soluție optimă a (PPL_p) şi $\tilde{w}$ este o soluție optimă a (PPL_D).

Consecințe.
1. Dacă (PPL_p) nu are optim finit $\Rightarrow$ (PPL_D) nu are soluții admisibile (i.e. $P_w = \emptyset$)

2. Dacă (PPL_D) nu are optim finit $\Rightarrow$ (PPL_p) nu are soluții admisibile (i.e. $P_x = \emptyset$).

Aceste propoziții şi consecințele lor permit demonstrarea teoremei fundamentale a dualității.

Teorema 6. Dacă soluție optimă a (PPL$_p$), există $(\tilde{x} \in P_X)$ şi este finită, atunci şi soluția optimă a (PPL$_D$) există $(w \in P_W)$ şi este finită şi valorile optime ale funcțiilor obiectiv coincid $\Rightarrow f(\tilde{x}) = g(\tilde{w})$

$f(\tilde{x}) = g(\tilde{w})$

În plus, dacă $\tilde{x}$ este soluția optimă de bază a (PPL$_p$) pentru baza $\tilde{B}$ formată cu m vectori coloană liniar independenți din A = (a_{i1}, a_{i2}, …, a_{ij}, …, a_{im}), atunci

$\tilde{x} = x^{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1} b; \tilde{w} = c_{\tilde{B}} \cdot \tilde{B}^{-1}$, unde $c_{\tilde{B}}$ sunt cele m costuri corespunzătoare vectorilor din baza $\tilde{B}$.

Valorile funcțiilor obiectiv sunt:

$$f(\tilde{x}) = c_{\tilde{B}} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b$$

$$g(\tilde{w}) = c_{\tilde{B}} \cdot \tilde{B}^{-1} \cdot b$$

Din această teoremă reiese concluzia că tabelul simplex final corespunzător problemei primale conține soluțiile optime ale ambelor probleme. Soluția problemei duale $w_B^T = c^B \cdot B^{-1}$ se obține pe linia z la intersecția cu coloanele vectorilor care au format baza inițială.

Similar, dacă se rezolvă problema duală rezultă că soluția (PPL$_p$) se află în ultimul tabel simplex al (PPL$_D$), pe linia $z_j^B - c_j$, în dreptul coloanelor care inițial au format baza.

Important! Această consecință dă posibilitatea rezolvării unei (PPL$_p$) prin duala sa, dacă este mai uşor de rezolvat, iar soluțiile primalei se citesc conform celor de mai sus.

Teorema 7 (teorema ecarturilor complementare).
Considerând cuplul de probleme (PPL$_p$), (PPL$_D$) date mai sus, condiția necesară şi suficientă ca soluțiile $\tilde{x} \in P_x$ şi $\tilde{w} \in P_w$ să fie optime este

$$\tilde{w}(A\tilde{x} - b) = 0$$

$$(c - \tilde{w}A)\tilde{x} = 0$$

2.3.3.2.Interpretări economice ale dualității

În acest paragraf sunt expuse câteva interpretări economice legate de dualitate (interpretarea problemei duale, a variabilelor duale şi a teoremelor de dualitate).
Propoziția 3. Variabila duală w_i ataşată restricției i, arată, la optim, variația nivelului optim al profitului (costului) total, consecutivă unei modificări a disponibilului din resursa i cu o unitate.
Observație. Tot din (P$_2$) obținem că variabilele duale w_i au semnificație de "preț".
Într-adevăr, din:

$$\tilde{c}\,x = \tilde{w}\,b \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{"preț"} \\ \text{(c)} \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} \text{cantitate} \\ \text{produsă} \\ (\tilde{x}) \end{bmatrix} = x[w] \cdot \begin{bmatrix} \text{cantitate din} \\ \text{resurse} \\ \text{(b)} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow w_i$ = “prețul” resursei i; dar nu este prețul de piață ci un “preț umbră” [“shadow prices”] atașat fiecărei resurse, care arată importanța locală, pentru agentul economic analizat, a resursei "i".
Prețurile umbră sunt costuri impuse sau de oportunitate ale factorilor de producție. Ei sunt indicatori cruciali pentru analiza programului optim și pentru modificarea lui în cazul redefinirii valorilor disponibile. Scrise ca un sir descrescător, valorile optimale ale variabilei duale indică ordinea de preferință în aprovizionarea suplimentară din cele m resurse; se poate astfel estima importanța relativă a celor m resurse în realizarea scopului declarat.
Din teorema ecarturilor complementare se deduc relațiile:

a) dacă $\tilde{w}_i \rangle 0$, atunci $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j = b_i$

b) dacă $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j \rangle b_i$, atunci $\tilde{w}_i = 0$

c) dacă $\tilde{x}_j \rangle 0$, atunci $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{w}_i = c_j$

d) dacă $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\tilde{w}_i \langle c_j$, atunci $\tilde{x}_j = 0$

Relațiile din a) arată că variabila duală corespunzătoare unei resurse utilizată în întregime este strict pozitivă, iar cele din b) că variabila duală $\tilde{w}_i$ este 0 dacă resursa i nu este folosită integral ($\Rightarrow$ orice creștere a resursei i nu are nici un efect asupra nivelului maxim al profitului $\Rightarrow$ există surplus din această resursă la agentul economic).
Dacă $w_i > w_j > 0 \Rightarrow$ resursa i este mai importantă decât resursa j, deci se va da prioritate aprovizionării cu resursa R_i în raport cu R_j.
Ținând cont de aceste interpretări economice observăm că teorema ecarturilor complementare are interpretarea economică:

1°) $\tilde{w}(A\tilde{x} - b) = 0 \Leftrightarrow$ evaluarea în “prețurile umbră” optimale a ecartului între disponibilul de resurse și consumul acestor resurse în activitatea agentului economic, arată că este nul, dacă agentul economic își desfășoară activitatea la nivel optim.

2°) $(c - \tilde{w}A)\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow$ ecartul între costurile reale ale activităților desfășurate la nivel optimal $(c\tilde{x})$ de agentul economic și valoarea consumului tehnologic $A\tilde{x}$ necesitat de aceste activități, evaluat la prețurile umbră optimale $\tilde{w}$, este nul.

2.3.4.Problema de transport

În acest capitol se vor studia o parte a modelelor liniare ce apar în activitatea de aprovizionare, în circumstanțe specificate.
În sistemul cibernetic al firmei, subsistemul transport – aprovizionare – desfacere realizează legătura directă dintre producător şi consumator, condiționând realizarea planului de desfacere. Organizarea eficientă a transporturilor presupune cunoaşterea tuturor rutelor de transport, precum şi a costurilor pe fiecare mijloc de transport în parte, astfel încât să se utilizeze rutele cele mai economice, deoarece o reducere permanentă a cheltuielilor de transport conduce la sporirea eficienței activității economice a firmei. Toate cheltuielile care sunt legate de transportul operativ al mărfurilor trebuie evidențiate distinct pe furnizori şi pe cantități transportate, pentru a se putea efectua o analiză economică riguroasă.
Primele încercări empirice de punere a problemei de transport au fost impuse de cerințele de alocare a mijloacelor de luptă în cel de-al doilea război mondial, astfel încât costul total să fie minim. Primele rezultate sunt obținute de Hitchcock (1941), Kantorovici (1942), apoi dezvoltate de Koopmans (1947). Ulterior, cercetările în acest domeniu au fost diversificate, obținându-se metode eficiente de rezolvare. Problema enunțată mai sus va prezenta interes numai dacă respectă următoarele ipoteze:
a) cel puțin o sursă poate aproviziona mai multe destinații şi cel puțin o destinație poate primi unități de flux de la mai multe surse.
b) unele rute de legatură pot avea limitări[8] superioare şi/sau inferioare pentru volumul unităților de flux ce se deplasează într-un sens sau altul.
c) există un cost al deplasării unei unități de flux de la un punct al rețelei la altul, care poate fi exprimat în bani, timp sau distanță.

2.3.4.1. Modelul matematic al problemei de transport

Se deduce modelul matematic al problemei de transport:

$$(\min) f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le d_i,\ i=\overline{1,m} \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge N_j,\ j=\overline{1,n} \qquad (3)$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n} \qquad (4)$$

unde parametrii problemei satisfac condițiile:

$$d_i \ge 0,\ N_j \ge 0,\ c_{ij} \ge 0 \qquad (5)$$

Într-adevăr, dacă x_{ij} va reprezenta cantitatea de produs ce trebuie transportată de la sursa F_i la destinația B_j, relațiile (2) impun condiția ca totalul transportat de la fiecare furnizor să nu depăşeşte existentul, relațiile (3) impun satisfacerea cererii, (1) cere minimizarea cheltuielilor totale de transport.
Condițiile (4) şi (5) apar naturale în contextul concret al problemei.

[8] capacități

Organizarea datelor se face tabelar, în tabloul de transport.

F_i / B_j	**B_1**	**B_2**	**…**	**B_j**	**…**	**B_n**	**Disp**
F_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1j}	…	C_{1n}	d_1
:							
F_i	C_{i1}	C_{i2}	…	C_{ij}	…	C_{in}	d_i
:							
F_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mj}	…	C_{mn}	d_m
Necesar	N_1	N_2	…	N_j	…	N_m	$\sum_i d_i$ / $\sum_j N_j$

Deci tabloul de transport conţine costurile (c_{ij}) ale transportului unei unităţi de produs (tonă, bucată, m^3, etc.) de la locul i (al furnizorului) la destinaţia j (a beneficiarului); conţine de asemenea datele privind disponibilul şi necesarul la fiecare partener.

Observaţie:

Există numeroase alte probleme în care obiectul urmărit nu constă în minimizarea costurilor, ci a altor indicatori precum distanţa totală – în care se ia în loc de c_{ij} indicatorul D_{ij} (distanţa pe ruta de transport de la i la j) sau timpul total, în care caz se ia t_{ij} – în loc de c_{ij}, unde t_{ij} = durata transportului de la i la j.

Se observă că problema (1)–(5) nu are soluţii admisibile dacă dispo total este

mai mic decât cererea totală.

Matematic, afirmaţia de mai sus este justificată prin relaţiile obţinu adunarea primelor m restricţii şi apoi a ultimelor n:

Disponibil total $= D = \sum_{i=1}^{m} d_i \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^{n} N_j = N =$ cerere total

De asemenea, condiţia ca $D = \sum_{i=1}^{m} d_i \geq \sum_{j=1}^{n} N_j = N$ este şi

suficientă, (în acest caz se verifică uşor că soluţia $x_{ij} = \dfrac{d_i \cdot N_j}{\sum_{i=1}^{m} d_i}$ este

soluţie admisibilă).

În plus, chiar dacă disponibilul total este mai mare decât cererea totală, este evident că se va transporta doar necesarul, deoarece transportarea unei cantităţi mai mari decât necesarul va duce la un cost suplimentar, în contradicţie cu scopul urmărit. Matematic, unei soluţii în care una din ultimele n restricţii ar fi verificată strict, îi corespunde o soluţie în care am scăzut cantitatea suplimentară din valorile variabilelor implicate în restricţie, care este de asemenea admisibilă (aceste variabile nu apar în alte restricţii dintre ultimele n, iar primele m vor fi cu atât mai mult verificate dacă x_{ij} scad) şi care este evident mai bună, dând un cost mai mic.

În concluzie, dacă există soluţie optimă, se va transportă exact cantitatea cerută.

Totuşi, în practică se poate întâlni oricare din cele trei cazuri.

Definiţia 2. Problema de transport se numeşte echilibrată dacă D = N (deci disponibilul total este egal cu necesarul total).

Practica oferă probleme economice în care se pot întâlni situaţiile:

a) D > N - oferta depăşeşte cererea
b) D < N - cererea depăşeşte oferta
Oricare din cele două situaţii conduce la probleme de transport echilibrate dacă se introduce un centru de destinaţie fictiv, respectiv un centru de origine fictiv, având costurile de transport nule şi cantitatea necesară, respectiv cea disponibilă, egale cu $\sum_{i=1}^{m} d_i - \sum_{j=1}^{n} N_j$ $(D-N)$, respectiv $\sum_{j=1}^{n} N_j - \sum_{i=1}^{m} d_i (N-D)$.

Prin transformări elementare orice problemă de tipul (1)–(5) poate fi adusă la forma:

$$\min f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1')$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i,\ i = \overline{1,m} \qquad (2')$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j,\ j = \overline{1,n} \qquad (3')$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n} \qquad (4')$$

iar asupra parametrilor se poate face supoziţia:

$$d_i \ge 0,\ N_j \ge 0,\ c_{ij} \ge 0 \qquad (5')$$

unde $\mathrm{D} = \sum_{i=1}^{m} d_i = \sum_{j=1}^{n} N_j = N$.

Modelul matematic (1') – (5') este echivalent cu o problemă de programare liniară.

Într-adevăr, notând cu:
$x = (x_{11}, x_{12},\ldots,x_{1n}, x_{21}, \ldots,x_{2n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn})^T$ - vectorul necunoscutelor;
$b = (d_n,\ldots,d_m, N_1,\ldots, N_n)^T$
A - matricea coeficienţilor

$$A = \begin{pmatrix} 11\ldots1 & 00\ldots0 & 00\ldots0 \\ 00\ldots0 & 11\ldots1 & 00\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots0 & 00\ldots0 & 11\ldots1 \\ 10\ldots0 & 10\ldots0 & 10\ldots0 \\ 01\ldots0 & 01\ldots0 & 01\ldots0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 00\ldots1 & 00\ldots1 & 00\ldots.1 \end{pmatrix}$$

obţinem

$$(\min) f = cx \qquad (1'')$$

$$Ax = b \qquad (2'')$$

$$x \ge 0 \qquad (3'')$$

unde $c = (c_{11}, \ldots, c_{1n}; c_{21},\ldots, c_{2n},\ldots, c_{m1},\ldots, c_{mn})$ este vectorul costurilor.

Este evident că problema de transport la forma standard este o

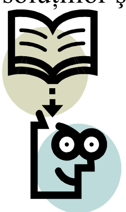
problemă de programare liniară la forma standard, dar este o problemă de programare care poate deveni uriaşă (un exemplu practic obişnuit cu, de exemplu, 30 de furnizori şi 20 consumatori, va duce la un tabel simplex de 50×600, şi sunt cazuri şi cu mii de furnizori şi consumatori), motiv pentru care algoritmul simplex sub forma clasică nu este aplicabil.
Datele problemei de transport au o structură cu totul deosebită, în matricea A a sistemului, toate componentele fiind 1 sau 0, din care 0 sunt mult mai mulți, astfel că din acest motiv este natural să căutăm un algoritm special pentru problema de transport care să se folosească la maximum caracteristicile acesteia.

Unitatea de învăţare 3

Aplicaţii ale programării matematice în fundamentarea deciziilor optime

3.1.Introducere

Problema optimizării unei funcţii se poate considera nu numai în cazul funcţiilor liniare.
În practică, funcţia obiectiv f(x) nu este liniară, după cum nu este nici independentă de anumite restricţii impuse lui x (restricţii de producţie), aşa cum s-a văzut cu ocazia problemelor de programare liniară.
Această caracteristică a problemei ridică dificultăţi substanţiale de ordin matematic în studiul proprietăţilor generale ale soluţiilor şi în elaborarea tehnicilor de calcul ale acestora.
Prima lucrare teoretică fundamentală în domeniul programării neliniare, care a stat la baza majorităţii cercetărilor ulterioare în acest domeniu, a fost rodul cercetărilor lui H.W. Kuhn şi A.W. Tucker în direcţia stabilirii unor condiţii necesare şi suficiente pentru existenţa soluţiilor şi a fost publicată în anul 1951.



3.2.Obiectivele şi competenţele unităţii de învăţare

Obiectivele unităţii de învăţare:
Însuşirea unor noţiuni şi concepte specifice programării neliniare, concepte utile în modelarea fenomenelor de natură economică şi managerială.
Competenţele unităţii de învăţare:
- studentul trebuie să-şi dezvolte abilităţile de a aplica corect cunoştinţele acumulate pentru rezolvarea diferitelor clase de probleme;
- studentul trebuie să-şi formeze şi dezvolte capacitatea de analiza.

3.3. Conţinutul unităţii de învăţare

3.3.1.Programarea neliniară – prezentare

În stabilirea modelelor matematice ale fenomenelor concrete care

conduc la probleme de tipul programării neliniare un rol important revine metodelor probabilistice, funcțiile economice fiind în general deduse în urma unei cercetări statistice a fenomenului.
Vom considera cazul general:

Fie o mulțime $X \subseteq \Re^n$ şi fie funcția reală $f: X \to \Re$ şi funcțiile vectoriale $g: X \to \Re^m$ şi $h: X \to \Re^k$.

O problemă generală de optimizare este de forma:

$$\min f(x)$$
$$\begin{cases} g(x) \leq 0 \\ h(x) = 0 \\ x \in X \end{cases} \qquad (1)$$

În cele ce urmează vom considera cazul problemei de minimizare (pentru maximizare se va proceda analog considerând funcția – f(x)).
Fie mulțimea soluțiilor (posibile)

$$X_0 = \{x \in X / g(x) \leq 0, h(x) = 0\} \qquad (2)$$

Problema de programare neliniară constă în determinarea punctelor de extremum global (minim sau maxim) ale funcției f pe mulțimea X_0.
Enunțul (1) a fost dat în scrierea vectorială. Dacă se folosesc componentele funcțiilor vectoriale g şi h, atunci modelul este:

$$\min f(x_1, \ldots, x_n)$$
$$\begin{cases} g_i(x_1,\ldots,x_n) \leq 0,\ i = \overline{1,m} \\ h_j(x_1,\ldots,x_n) = 0,\ j = \overline{1,k} \\ (x_1,\ldots,x_n) \in X \end{cases} \qquad (3)$$

Pentru aflarea punctelor de extrem se foloseşte ***metoda multiplicatorilor Lagrange***, deci se obține funcția:

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) \qquad (4)$$

unde $x \in X,\ \lambda \in \Re^m,\ \mu \in \Re^k$

Definiția 1. Punctul (x^*, λ^*, μ^*) cu $x^* \in X,\ \lambda^* \in \Re_+^m,\ \mu^* \in \Re^k$ se numeşte **punct şa al funcției L**dacă:

$$L(x^*,\lambda,\mu) \leq L(x^*,\lambda^*,\mu^*) \leq L(x,\lambda^*,\mu^*) \qquad (5)$$

pentru orice $x \in X,\ \lambda \in \Re_+^m,\ \mu \in \Re^k$.

Teorema 1. Dacă (x^*, λ^*, μ^*) este un punct şa al funcției L, atunci x^* este punct de minim global al lui f pe mulțimea X_0 (adică x^* este soluția optimă a problemei de programare neliniară (1)).
Teorema dă ***condiții suficiente de optimalitate***în programarea neliniară. Pentru a obține condiții necesare şi suficiente trebuie introduse ipoteze suplimentare atât asupra mulțimii X, cât şi asupra funcțiilor care apar în model.

3.3.2. Condițiile Kuhn – Tucker

Definiție.O problemă de programare neliniară (1) în care funcțiile f, g şi h sunt convexe, definite pe mulțimea $X \subseteq \Re^n$ convexă, se va numi **problemă de programare convexă.**
Fie problema de programare neliniară convexă:

$$\min_{x \in X} f(x)$$

$$\begin{cases} g(x) \le 0 \\ x \in X \end{cases} \qquad (8)$$

şi fie mulţimea soluţiilor posibile
$X_0 = \{x \in X / g_i(x) \le 0, i = \overline{1,m}\}$
care este tot o mulţime convexă (ca intersecţie de mulţimi convexe).
O *condiţie necesară* pentru existenţa punctului şa în programarea convexă este ca interiorul mulţimii X_0 să fie nevid, adică să existe $x \in X_0$, astfel ca $g(x) \langle 0$ (**condiţia lui Slater**).

Propoziţia 1. Mulţimea soluţiilor optime ale problemei de programare convexă este o mulţime convexă.

Propoziţia 2 (Karlin). Condiţia necesară şi suficientă ca o soluţie $x^* \in X_0$ a unei probleme de programare convexă (8) să fie optimă este ca să existe $\lambda^* \ge 0$, astfel încât (x^*, λ^*) să fie punct şa al funcţiei Lagrange $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T g(x)$

Teorema 2. Dacă la ipotezele propoziţiei (2) se adaugă faptul că f şi g sunt diferenţiabile în $x^* \in X$ şi că $X = \Re^n$, atunci condiţia necesară şi suficientă ca x^* să fie soluţie optimă a problemei (8) este să existe $\lambda^* \ge 0$ astfel încât:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \\ g(x^*) \le 0 \\ \lambda^* \ge 0 \\ (\lambda^*)^T g(x^*) = 0 \end{cases} \qquad (9)$$

Relaţiile (9) se numesc ***condiţiile Kuhn-Tucker***.

O teoremă asemănătoare celei de mai sus va fi enunţată pentru un model de programare neliniară de o formă mai generală şi anume: Fie $X \subset \Re^{n+p}$ o mulţime deschisă şi fie funcţia reală $f : X \to \Re$ şi funcţiile vectoriale $g : X \to \Re^m$ şi $h : X \to \Re^k$ diferenţiabile în punctul $(x^*, y^*) \in X$. În plus, funcţiile f şi g sunt convexe în X, iar h este atât convexă cât şi concavă în X.
Fie problema de programare neliniară:
min f(x,y)

$$\begin{cases} g(x,y) \le 0 \\ h(x,y) = 0 \\ x \ge 0 \\ (x,y) \in X \end{cases} \qquad (10)$$

Teorema 3. În aceste ipoteze o condiţie necesară şi suficientă ca $(x^*, y^*) \in X$ să fie soluţie optimă a problemei (10) este să existe $\lambda^* \in \Re^m_+, \mu^* \in \Re^k, \nu^* \in \Re^n_+$, astfel încât să fie îndeplinite condiţiile:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*) = 0 \\ \nabla_y L(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*, \nu^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) \le 0 \\ h(x^*, y^*) = 0 \\ x^* \ge 0, \text{y}^* - \text{oarecare} \\ \lambda^* \ge 0, \mu^* - \text{oarecare}, \nu^* \ge 0 \\ (\lambda^*)^T g(x^*, \mu^*) = 0,\ (\nu^*)^T x^* = 0 \end{cases}$$

unde: L este funcția Lagrange asociată problemei (10) definită $(\forall)(x, y) \in X$ și $(\forall)\lambda \in \Re^{\text{m}},\ \mu \in \Re^k,\ \nu \in \Re^n$, dată de $L(x, y, \lambda, \mu, \nu) = f(x, y) + \lambda^T g(x, y) + \mu^T h(x, y) - \nu^T x$

În modelele utilizate până acum s-a cerut determinarea minimului funcției f. Dacă problemele de programare neliniară sunt de maxim, deosebirile ce apar în aflarea acestor puncte de extrem cu ajutorul condițiilor Kuhn-Tucker sunt cele referitoare la semnele multiplicatorilor Lagrange şi anume, în aceste probleme $\lambda^* \ge 0$, respectiv $\nu^* \ge 0$.

Este cunoscută relația maxf = -min(-f)

3.3.3. Programare pătratică

Se va numi **problemă de programare pătratică**o problemă de forma:

$$\min f(x) = \frac{1}{2} x^T \cdot H \cdot x + c^T \cdot x$$
$$g(x) = Ax - b \le 0$$

unde: $x \in \Re^n$, H este o matrice simetrică nesingulară de ordin n pozitiv – semidefinită, $c \in \Re^n$, iar $A \in M_{m,n}$ cu rang A=m<n şi $b \in \Re^m$.

Funcția vectorială g va avea deci componentele $g_i(x) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n - b_i \le 0,\ i = \overline{1,n}$

care sunt funcții liniare.

Modelul poate să conțină şi condiții de nenegativitate pentru toate cele n variabile $x_1,\dots,x_n$, sau numai pentru o parte dintre acestea.

Pentru anumite modele de programare pătratică vom prezenta un algoritm de rezolvare mai simplu.

3.3.4.Metoda simplex pentru rezolvare problemelor de programare pătratică (Metoda Frank şi Wolfe)

Problemele de programare pătratică au funcție obiectiv f de gradul doi, restricțiile date de funcția vectorială $g(x) = (g_1(x),..., g_m(x))^T$ sunt funcții liniare, iar vectorul x are condiția de nenegativitate.

Condițiile Kuhn-Tucker, aşa cum au fost enunțate mai sus, sunt alcătuite din grupa de egalități şi de inegalități, care necesită un volum mare de calcule pentru rezolvare, având de obicei multe soluții.

În cazul în care problema este de programare pătratică, condițiile Kuhn-Tucker vor fi egalități de gradul întâi cu excepția celor din condiția de ecart: $\lambda_i g_i(x_1,..., x_n) = 0,\ \ i = \overline{1,m}$

fiecare dintre acestea putându-se descompune în câte două posibilități:

$$\lambda_i = 0 \text{ sau } g_i(x_1, ..., x_n) = 0,\ i = \overline{1,m}$$

Acest lucru se poate exprima şi astfel: λ_i şi $g_i(x_1,...,x_n)$ nu pot fi în acelaşi timp diferite de 0.

Tot din condițiile Kuh-Tucker trebuie ca: $g_i(x_1,...,x_n) \le 0,\ i = \overline{1,m}$

Această inegalitate se aduce la forma standard dacă se adaugă o variabilă de compensare, deci se poate exprima următoarea concluzie: $\boxed{a}$ λ_i şi variabilele ce compensează restricțiile $g_i(x_1,...,x_n) \le 0\ \ (i = \overline{1,m})$ nu pot fi nenule în aceeaşi soluție.

Pentru rezolvarea problemei cu ajutorul algoritmului simplex sunt necesare următoarele etape:

1) se transformă restricțiile problemei, inclusiv condițiile de nenegativitate în egalități cu sensul "≤";

2) se scriu condițiile Kuhn-Tucker cu multiplicatorii $\lambda_i,\ i = \overline{1,m}$, pentru problemele de minim şi $-\lambda_i,\ \ i = \overline{1,m}$, pentru cele de maxim;

3) se aduce sistemul condițiilor Kuhn-Tucker, în afara condițiilor de ecart, la forma standard a algoritmului simplex;

4) dacă a fost necesară introducerea unor variabile artificiale pentru alcătuirea bazei unitare, atunci se rezolvă problema având funcția obiectiv egală cu suma acestora, care se minimizează la fel ca în metoda celor două faze. Din momentul în care s-a obținut soluția optimă (în care funcția obiectiv are valoarea 0) se renunță la vectorii artificiali şi se continuă aplicarea algoritmului fără funcția obiectiv şi ținând seama de condiția $\boxed{a}$.

Dacă problema nu avea variabile artificiale, atunci se aplică algoritmul simplex fără funcție obiectiv, obținând toate soluțiile de bază posibile care satisfac condiția $\boxed{a}$.

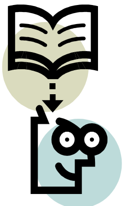
Pentru toate aceste soluții de bază se calculează valoarea funcției obiectiv şi se alege soluția ca fiind punctul de extrem global al funcției de eficiență.

Unitatea de învățare 4

Gestiunea optimă a stocurilor

4.1. Introducere

În procesul de producție, o problemă de mare importanță o constituie *planificarea stocurilor* deoarece este legată de valoarea economică a producției. Pentru ca procesul de producție într-o întreprindere să se desfăşoare în mod continuu, trebuie ca întreprinderea să aibă un *stoc de materiale*. Se pune deci *problema dimensionării stocurilor* (de materii prime şi materiale) astfel încât *costurile* (pierderile valorice) care se obțin din imobilizarea fondurilor sau neutilizarea maşinilor şi forței de muncă să fie minime. În mod analog, se pune problema în ceea ce priveşte valorile rezultate din procesul de producție.
Rezolvarea problemelor legate de *determinarea stocurilor optime* se realizează cu ajutorul unor *modele matematice ale teoriei stocurilor*.



4.2. Obiectivele şi competențele unității de învățare

Obiectivele unității de învățare:
- utilizarea modelelor cantitative necesare modelării cantitative a stocurilor;

Competențele unității de învățare:
- înțelegerea elementară a metodelor folosite în analiza stocurilor;
- cunoaşterea şi înțelegerea integrală a modelelor utilizate în analiza stocurilor.

4.3. Conținutul unității de învățare

4.3.1. Model de stoc cu cerere constantă, fără ruptură de stoc

Dacă în modelul anterior se consideră $t=t_1$, atunci $x=y$, $c_p=0$.
Cheltuielile totale vor fi:

$$C(x) = \frac{N}{x} \cdot c_l + \frac{x}{2} T c_s$$

Se obține punctul

$$x_0 = \sqrt{\frac{2Nc_s}{Tc_s}}$$

care este punct de minim, iar cheltuielile minime vor fi:

$$C(x_0) = \sqrt{2NTc_l c_s}$$

Considerând în acest model că aprovizionarea se face cu n produse, se obține

$$C(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N_i}{x_i}\cdot c_{l_i} + \frac{x_i}{2}Tc_{s_i}\right)$$

pentru care avem:

$$\begin{cases} C'_{x_1}(x_1,...,x_n) = -\dfrac{N_1}{x_1^2}\cdot c_{l_1} + \dfrac{1}{2}Tc_{s_1} = 0 \\ \vdots \\ C'_{x_n}(x_1,...,x_n) = -\dfrac{N_m}{x_n^2}\cdot c_{l_n} + \dfrac{1}{2}Tc_{s_n} = 0 \end{cases}$$

Rezultă: $x_i^0 = \sqrt{\dfrac{2N_i c_{l\,i}}{Tc_{s_i}}},\ i = \overline{1,n}$

Deci $x^0 = (x_1^0,...,x_n^0)^T$ punct staționar pentru care matricea hessiană este:

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{Tc_{l_1}}{x_1^0} & 0 & ... & 0 \\ 0 & \dfrac{Tc_{l_2}}{x_2^0} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \dfrac{Tc_{l_n}}{x_n^0} \end{pmatrix}$$

Matricea este pozitiv definită, deci punctul staționar este punct de minim.

4.3.2. Modelul de stoc cu cerere constantă, fără lipsă de stoc, pentru mai multe produse

Funcția economică a cheltuielilor totale necesare pentru achiziționarea a n produse este:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N_i c_{l_i}}{x_i} + \frac{x_i}{2}Tc_{s_i} + N_i p_i + R_i\right)$$

unde am notat cu x vectorul cu n componente x_i ce reprezintă cantitatea comandată de produsul i, $i = \overline{1,n}$, N_i – cantitatea totală din produsul i ce se consumă pe perioada de timp T, c_{l_i} - costul de lansare a unei comenzi pentru produsul i şi c_{s_i} - costul de stocare unitar pentru produsul i, p_i – prețul unitar de achiziție al produsului i şi R_i – amortismente şi retribuții, $i = \overline{1,n}$.

Presupunând că V este capacitatea totală de depozitare (sau investiția totală), iar V_i este volumul unitar ocupat de produsul i (sau este investiția unitară specifică produsului i) atunci problema determinării stocului optim va fi:

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N_i c_{l_i}}{x_i}+\frac{x_i}{2}Tc_{s_i}+N_i p_i+R_i\right)$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le V\\ x_i \rangle 0,\ i=\overline{1,n}\end{cases}$$

Condițiile Kuh-Tucker devin:

$$\begin{cases}-\frac{N_i c_{l_i}}{x_i^2}+\frac{1}{2}Tc_{s_i}+\lambda v_i=0\\ \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i - V\right)=0\\ \lambda \ge 0,\ x\rangle 0\\ \sum_{i=1}^{n} x_i v_i - V \le 0\end{cases}$$

Dacă $\lambda^* = 0$, atunci din prima relație rezultă soluția:

$$x_i^* = \sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i}}},\quad i=\overline{1,n}$$

cu valoarea optimă a funcției

$$f(x^*)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2N_i c_{l_i} c_{s_i} T}+N_i p_i+R_i\right)$$

Se arată că soluția optimă găsită satisface condiția:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i^* = V^* \le V$$

pentru a putea verifica ultimele două relații din sistemul condițiilor Kuhn-Tucker.

Dacă: $\lambda \rangle 0$, se obține soluția optimă:

$$x_i^{**}=\sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i}+2\lambda v_i}}\quad i=\overline{1,n}$$

iar valoarea optimă a lui λ se va găsi din a doua relație din sistemul condițiilor Kuhn-Tucker, $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = V$, care devine:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i^{**} = V^{**} = V$$

Observăm că $x_i^* \rangle x_i^{**}$ şi deci $V^* \rangle V^{**} = V$.

Rezultă de aici următoarea metodă de lucru:

a) se determină x_i^*, $i=\overline{1,n}$, din (4)

b) se calculează $V^* = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i^*$

c) dacă $V^* \le V$, atunci loturile x_i^* sunt optime, iar investiția totală nu este folosită integral (dacă $V^* \langle V$), sau este folosită integral (dacă $V^* = V$).

d) dacă $V^* \rangle V$, atunci loturile optime vor fi

$$x_i^{**}=\sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i}+2\lambda v_i}},\quad i=\overline{1,n},$$

în care λ^{**} se găseşte din ecuația:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i} + 2\lambda v_i}} = V$$

şi deci investiţia totală este utilizată integral.

4.3.3. Modelul de stoc cu cerere constantă, cu posibilitatea întreruperii stocului, pentru mai multe produse

Funcţia cheltuielilor totale este:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [\frac{N_i c_{l_i}}{x_i} + \frac{y_i^2}{2x_i} Tc_{s_i} + \frac{(x_i - y_i)^2}{2x_i} \cdot Tc_{p_i}]$$

unde: N_i reprezintă cantitatea totală de produse de tipul i cu care se face aprovizionarea pe o perioadă T, x_i – cantitatea necesară într-o comandă, y_i – cantitatea din stoc ($y_i \langle x_i,\ i = \overline{1,n}$), c_{l_i} - Funcţia cheltuielilor totale este

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [\frac{N_i c_{l_i}}{x_i} + \frac{y_i^2}{2x_i} Tc_{s_i} + \frac{(x_i - y_i)^2}{2x_i} \cdot Tc_{p_i}]$$

unde N_i reprezintă cantitatea totală de produse de tipul i cu care se face aprovizionarea pe o perioadă T, x_i – cantitatea necesară într-o comandă, y_i – cantitatea din stoc ($y_i \langle x_i,\ i = \overline{1,n}$), c_{l_i} - cheltuieli de lansare a unei comenzi, c_{s_i} - costul unitar de stocare, iar c_{p_i} - costul unitar de penalizare pentru lipsa din stoc pentru produsul de tipul i, $i = \overline{1,n}$.

Dacă se impune aceeaşi condiţie ca la problema anterioară:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i \le V$$

atunci condiţiile Kuhn-Tucker devin:

$$-2N_i c_{l_i} - T(c_{s_i} + c_{p_i}) y_i^2 + (Tc_{p_i} + 2\lambda v_i) x_i^2 = 0$$

$$(c_{s_i} + c_{p_i}) y_i - c_{p_i} x_i = 0,\ \ i = \overline{1,n}$$

$$\lambda (\sum_{i=1}^{n} v_i x_i - V) = 0,\ \ \lambda \ge 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i x_i - V \le 0$$

Analog modelului anterior se ajunge la următoarele etape de rezolvare:

a) se calculează

$$x_i^* = \sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i} \cdot \rho_i}},\ \ i = \overline{1,n}$$

$$y_i^* = \rho_i x_i^*,\ i = \overline{1,n}$$

unde: $\rho_i = \frac{c_{p_i}}{c_{s_i} + c_{p_i}},\ i = \overline{1,n}$

b) se calculează

$$V^* = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i^*$$

c) Dacă $V^* \le V$, atunci loturile x_i^* şi stocurile y_i^* sunt optime, iar investiţia totală nu este folosită integral (dacă $V^* \langle V$), sau este folosită integral (dacă $V^* = V$). Ambele situații se produc pentru $\lambda^* = 0$.

d) dacă $V^* \rangle V$, atunci loturile optime sunt:

$$x_i^{**} = \sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i}\rho_i + 2\lambda v_i}}, \quad i = \overline{1,n}$$

iar stocurile optime sunt: $y_i^{**} = \rho_i x_i^{**}, \quad i = \overline{1,n}$

unde λ se găseşte din ecuația:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \sqrt{\frac{2N_i c_{l_i}}{Tc_{s_i}\rho_i + 2\lambda v_i}} = V,$$

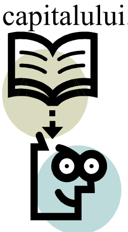
iar investiția este folosită integral.

Unitatea de învățare 5

Modelarea deciziei de investiție, componentă principală a deciziilor financiare

5.1. Introducere

La nivel microeconomic managementul financiar se bazează pe un ansamblu de decizii financiare, printre care *decizia de investire* poate fi considerată ca fiind una dintre cele mai importante decizii luate la nivelul managementului firmei. Procesul investițional reprezintă din punct de vedere teoretic aplicarea teoriei microeconomiei, conform căreia o întreprindere trebuie să cheltuiască până în momentul în care venitul marginal egalează costul marginal. Aşadar, în cazul investițiilor, decizia are în vedere rata de randament a capitalului existent şi costul marginal al capitalului.



5.2.Obiectivele şi competenţele unității de învățare

Obiectivele unității de învățare:

- înțelegerea şi aplicarea analizei de sistem la domeniul deciziilor de investiții.

Competenţele unității de învățare:

- fundamentarea corectă a deciziei de investiții.

5.3. Conţinutul unității de învățare

5.3.1.Trăsăturile deciziei de investiții

Decizia de a investi apare ca urmare a necesității sau interesului de a realiza o investiție. Orice decizie de a investi se raportează la obiectivul major al finanțelor private: *maximizarea valorii firmei şi a averii acționarilor*. Modul în care o întreprindere creşte şi se dezvoltă, capacitatea de a supraviețui şi chiar de a fi competitivă depinde de capacitatea de a genera constant fluxuri de idei pentru produse noi şi calitative sau care implică costuri mai mici, adică de a lua cele mai bune decizii de investiții. O astfel de decizie are la bază mai multe considerente, şi anume: “sistemul valoric” (valoarea în timp a banilor), mediul socio-economic în care se desfăşoară proiectul, perspectiva investitorilor, modalitățile de finanțare, riscuri aferente, previziunea fluxurilor de intrare şi ieşire, măsurarea performantei. etc.

Procesul decizional investițional cuprinde aceleaşi componente ca şi procesul decizional managerial, şi anume: decidentul, mulțimea variantelor (alternativelor) decizionale, mulțimea criteriilor decizionale, mediul ambiant, mulțimea consecințelor şi a obiectivelor.

Decidentul este reprezentat de persoana sau organismul care adoptă decizia de investire. Acțiunile decidenților, cu privire la decizia de investiții, sunt puternic influențate de mediul în care aceştia acționează sau atfel spus de totalitatea elementelor endogene şi exogene întreprinderii care alcătuiesc situația decizională, caracterizată prin apariția unor influențe directe şi indirecte puternice asupra conținutului şi rezultatelor deciziei manageriale. Mediul ambiant are un conținut şi o evoluție complexă, şi uneori chiar contradictorie: pe de o parte au loc o serie de transformări de natură să ofere premise mai bune pentru un proces decizional eficient, iar pe de altă parte, mediul ambiant decizional se transformă, ca urmare a creşterii numărului de agenți economici, a varietății activităților şi tranzacțiilor în care aceştia sunt implicați şi a cerințelor specifice datorate interconectării cu celelalte sisteme economice.

5.3.2. Decizii investiționale la nivelul firmei

Creşterea şi dezvoltarea economică a unei țări este determinată, în mod practic, de volumul şi structura investițiilor. Volumul investițiilor exprimă latura cantitativă a procesului investițional, în timp ce structura lor redă calitatea, eficiența procesului. În ceea ce priveşte structura investițiilor, lucrurile sunt mai complicate. Pentru a determina căile de optimizare pe care ar trebui să le urmăm, este necesar să facem apel la o anumită introspecție, favorizată de grupări şi clasificări. Principala clasificare cu care se operează în acest domeniu este cea de *investiții reale şi investiții financiare*. Investițiile financiare şi investițiile reale sunt două laturi ale fenomenului investițional, fiecare având un rol specific.
Investițiile financiare creează resursele necesare realizării investițiilor reale şi, de aceea, ele premerg celor reale. Nu întotdeauna, însă, trecerea de la investițiile financiare la investițiile reale se face în mod direct, nemijlocit, deoarece de cele mai multe ori, o anumită categorie de investiții financiare se transformă într-o altă categorie, tot de natură financiară, operația având un caracter iterativ. Pâna la un anumit punct, această „auto-metamorfozare”, este necesară, apropiind investițiile financiare de cele reale, dar după acest punct critic ea devine inutilă pentru pentru economia reala, fiind benefică numai pentru cei ce operează cu bani.
Orice investiție creează o „economie” nouă; aşadar investițiile financiare aparțin economiei financiare, iar investițiile reale se revarsă în economia reală.

5.3.2.1. Obiective şi restricții în cazul adoptării deciziei de investiții în active reale

Investițiile pe piața reală constau în transformarea unor lichidități în diverse active reale. Din punct de vedere contabil, pe durata realizării investiției, ele sunt imobilizări în curs, iar după ce se finalizează obiectivul de investiții, ele sunt înregistrate contabil ca imobilizări corporale, necorporale. Acestea reprezintă cheltuieli băneşti, materiale şi umane efectuate în diferite domenii (economic, social, cultural etc.) pentru achiziționarea sau realizarea de active imobilizate şi circulante noi sau pentru modernizarea celor existente, în vederea obținerii ulterioare a unor efecte economice, sociale etc.

Cele mai importante investiții în active reale sunt cele din domeniu economic care se realizează în industrie, agricultură, construcții, transport, etc şi care influențează direct creşterea produsului intern brut . Decizia de a face o investiție pe piața reală este prezentată sub forma unui proiect de investiții.

Potrivit metodologiei Băncii Mondiale, proiectul de investiții „este o activitate, cu un punct de plecare şi respectiv de încheiere propriu, care urmăreşte obținerea unui obiectiv specific, între aceste puncte realizându-se o serie de fluxuri de ieşire şi intrări şi care, din punct de vedere economico-financiar semnifică cheltuieli şi venituri. Un proiect de investiții de pe piața reală se concretizează prin mărimea şi finalitatea sa."[9]

Mărimea unui proiect de investiții este dată, în esența, de valoarea cheltuielilor de investiții, dar ea poate fi apreciată şi prin mărimea imobilizărilor care fac obiectul proiectului de investiții.

Altfel spus, proiectul de investiții reprezintă un ansamblu coerent de acțiuni cu caracter investițional care urmăreşte alocarea organizată de resurse materiale, financiare, umane şi informaționale în scopul realizării unui obiectiv cu efect economic şi/sau social.

De cele mai multe ori, realizarea unor proiecte de investiții este condiționată de volumul fondurilor de investiție de care dispune firma, restricție impusă de managementul firmei, care urmăreşte în permanență evitarea riscului financiar. Într-o perpsectivă mai mare, în care se ține cont de legătura pe care firma o poate stabili cu piața de capital, de posibilitatea acesteia de a contracta credite pe piața de capital face să nu existe practic nicio restricție externă asupra numărului de proiecte care pot fi realizate de către o firmă.

Elementele principale, definitorii pentru investițiile în active reale pot fi rezumate astfel:

- ✓ investițiile în active reale implică, în general, cheltuieli financiare substanțiale;
- ✓ veniturile rezultate din investiție apar pe parcursul unui număr de ani, într-o perioadă viitoare;
- ✓ există, în general, elemente de risc şi incertitudine în prognozarea mărimii fluxului de venituri şi cheltuieli viitoare;
- ✓ aceste investiții presupun o serie de cheltuieli cu impact direct asupra capabilității firmei pentru atingerea obiectivelor sale strategice şi operaționale (de exemplu: retehnologizări, modernizări etc.).

[9]Gittinger, J. Price, *„Economic analysis of agricultural projects"*, BIRD, The John Hopkins University Press, Baltimore&Londra, 1972, pg. 7

În definițiile standard, unele trăsături ale investițiilor în active reale, precum și cerințele necesare fundamentării deciziilor asociate lor sunt de obicei omise. Astfel, modalitățile în care deciziile legate de investițiile în active reale sunt legate de alte activități organizaționale şi care au influență asupra acestora ar trebui să fie considerate ca o parte integrantă a activității investiționale.
Deciziile de investiții în active reale se fundamentează într-un context social-organizațional şi au impact asupra poziției strategice şi operaționale a firmei, precum şi asupra oamenilor care constituie firma respectivă. Aceste decizii trebuie să ia în considerare implicațiile strategice ale investiției propuse, precum şi o examinare riguroasă a efectelor lor financiare.

5.3.2.2. Obiective şi restricții în cazul adoptării deciziei de investiții în active financiare

O altă variantă pe care firmele o au la dispoziție pentru a-şi investi fondurile o constituie *investițiile financiare*. În situația în care o firmă cumpără acțiuni ale altei firme, aceasta trebuie să estimeze prețul acestora şi să anticipeze evoluția viitoare a firmei respective. O astfel de investiție are un grad de risc ridicat datorat evoluției incerte atât a firmei ale cărei acțiuni sunt cumpărate, cât şi a pieței acțiunilor.
În literatura şi practica din domeniu se apreciază că *investiții financiare* – sunt investiții de portofoliu, reprezentând plasamente financiare efectuate în vederea obținerii de profit.
Modalitățile prin care se poate realiza o investiție financiară sunt multiple, şi anume: cumpărarea de acțiuni şi obligațiuni; acordarea de credite; plasamente bancare; operațiuni valutare.
Pe piața financiară, investițiile financiare se realizează prin intermediul activelor financiare care pot fi: active bancare (rezultate ca urmare a operațiunilor bancare); active de capital (rezultate din plasamente pe termen mediu şi lung); active monetare (rezultate din plasamente pe termen scurt). Pentru realizarea scopului, şi anume obținerea de profit, activele financiare parcurg un circuit închis în două etape:
- o primă etapă de la posesorii de active (persoane fizice şi juridice) la intermediari (bănci, burse de valori, fonduri de investiții, fondurile de pensii etc.) care le gestionează şi le plasează spre fructificare utilizatorilor;
- a doua etapă, de la utilizatorii de active la intermediari care le restituie posesorilor, inclusiv profitul sau pierderea.

Investițiile sunt împărțite pe clase de active. În economie există patru tipuri de active, şi anume :❶ banii (cash) ;❷ obligațiunile ; ❸ acțiunile (investițiile de tip proprietate); ❹ activele reale.
Primele trei active sunt denumite *active financiare*, întrucât profiturile lor se exprimă în bani. Activele finaciare includ, de asemenea, creditele bancare, obligațiunile de tip leasing etc.

5.3.3. Modelarea deciziei de portofoliu

5.3.3.1. Un model de analiză privind variația ratei dobânzii şi a celei de schimb

Pentru determinarea diferențelor ratei dobânzii la nivel internațional sau a primelor de risc, trebuie analizat modul de stabilire a prețurilor acestor riscuri. Aceasta ajută, de asemenea, să se identifice care țări beneficiază de variabilitate mai mică a ratei de schimb prin stabilirea unui sistem fix de rată de schimb ca, de exemplu, Uniunea Monetară Europeană [12]. În aceste condiții se impune întrebarea dacă o reducere a riscului ratei de schimb poate reduce ratele reale ale dobânzilor şi dacă este posibil acest lucru în ce situație anume. Pentru a răspunde la aceste întrebări în acest subcapitol se va analiza modul în care primele de risc depind de: 1) tipul de consum al unei țări), 2) atitudinea acesteia față de risc, 3), poziția competitivă 4) dimensiunea şi 5) poziția datoriei. Aceste întrebări se adresează unui model de echilibru între alocarea portofoliului de active denominate în monede diferite. Modelul este general, în sensul că aceasta ia în considerare în mod explicit atât investitorii locali cât şi străini, precum şi piețele interne şi externe a activelor. Întrucât scopul principal este de a analiza modul în care cursul de schimb şi riscul privind prețurile sunt evaluate, este necesară şi evidențierea modului în care investitorii autohtoni şi străini sunt afectați de aceste riscuri. Acest aspect este menționat în cele mai multe analize teoretice şi empirice, care folosesc ipoteze ce minimalizează sorgintea investitorilor, de exemplu, prin concentrarea asupra unui reprezentant al investitorilor autohtoni.
Modelul descris permite analiza modului în care riscul ratei de schimb afectează tranzacționarea activelor care diferă doar prin moneda în care sunt exprimate. Astfel, se identifică factorii relevanți ai prețului riscului ratei de schimb, şi, în acest scop, un model de portofoliu este extrem de util.
Considerând un model „în timp continuu" cu două active exprimate în moneda autohtonă şi străină. Investitorii autohtoni alocă o fracție (λ) din valoarea nominală a activelor lor (W) în moneda străină (F), şi o altă fracție ($1-\lambda$) în moneda națională (B), astfel:

$$\lambda W = EF$$

$$(1-\lambda)W = B$$

unde: E reprezintă prețul monedei străine măsurată în moneda națională. În mod similar, investitorii străini alocă λ^* din valoarea nominală a patrimoniului lor, W^*, în moneda străină, F^*, şi o fracție $1-\lambda^*$ în moneda lor naționala, B^*, astfel:

$$\lambda^* W^* = \frac{1}{E} F^*$$

$$(1-\lambda^*)W^* = B^*$$

Echilibrul pieței în ceea ce priveşte piața națională a titlurilor de valoare implică următoarea relație: $S = (1-\lambda)W + \lambda^* E W^*$
unde: S reprezintă oferta autohtonă de titluri de valoare, presupusă a fi o constantă exogenă.

Ambele categorii de titluri (autohtone şi străine) au un anume beneficiu (rentabilitate), i si respectiv i^*, astfel:

$$\frac{dB}{B} = \frac{dF^*}{F^*} = i\,dt$$

$$\frac{dF}{F} = \frac{dB^*}{B^*} = i^*dt$$

Rata de schimb, prețul producției autohtone (P) şi prețul producției externe (P^*), urmează un proces stohastic:

$$\frac{dE}{E} = \varepsilon dt + \sigma_e dZ_e$$

$$\frac{dP}{P} = \Pi dt + \sigma_P dZ_P$$

$$\frac{dP^*}{P^*} = \Pi^* dt + \sigma_{P^*} dZ_{P^*}$$

unde: $\varepsilon, \Pi \text{ şi } \Pi^*$ reprezintă resursele, iar $\sigma_e^2, \sigma_P^2 \text{ şi } \sigma_{P^*}^2$ reprezintă dispersiile proceselor stohastice;

$dZ_e, dZ_P \text{ şi } dZ_{P^*}$ reprezintă creşterile din procesul Wiener standard. Covarianțele între procesele stohastice sunt notate cu ρ_{ep}, ρ_{ep^*} şi respectiv ρ_{PP^*} .

Utilizând Lema lui Itô [31], procesul stocastic pentru rata de schimb străină 1/E este:

$$\frac{d1/E}{1/E} = -\mu dt - \sigma_e dZ_e$$

unde: relația dintre ε şi µ este dată de $\varepsilon - \mu = \sigma_e^2$.

Aşadar, indicele prețului de consum autohton este definit prin:

$$Q = P^{1-\beta}\left(EP^*\right)^{\beta}, \quad 0 \le \beta \le 1$$
$$= PC^{\beta}$$

unde: $C = EP^*/P$ reprezintă prețul relativ dintre producția externă şi cea autohtonă în moneda comuna, adică cursul de schimb real sau competitivitatea.

Indicele prețului de consum extern este definit prin:

$$Q^* = \left(P\frac{1}{E}\right)^{1-\alpha} P^{*\alpha} = \frac{P}{E}C^{\alpha}$$

Aplicând din nou Lema lui Ito, rezultă că relația dintre indicele prețului de consum autohton şi cursul de schimb este:

$$\rho_{qe} = \rho_{pe} + \beta\rho_{ce}$$

unde: ρ_{ce}, reprezintă relația dintre cursul de schimb real şi cel nominal. Relația dintre indicele prețului de consum extern şi cursul de schimb este: $\rho_{q^*e} = \rho_{pe} - \sigma_e^2 + \alpha\rho_{ce}$.

Investitorii autohtoni maximizează funcția de utilitate definită prin capitalul real, astfel:[10]

$$V = E\left(d\widetilde{W} / \widetilde{W}\right) - \frac{R}{2}\operatorname{var}\left(d\widetilde{W} / \widetilde{W}\right)$$

unde: $\widetilde{W} = W / Q$ și R este valoarea Arrow-Pratt pentru aversiunea față de riscul relativ și care reprezintă o constantă. Rezultă că alocarea oprimă din portofoliu, pentru investitorii autohtoni, este dată de: $\lambda = \frac{1}{R\sigma_e^2}\left[i^* + \varepsilon - i + (R-1)\rho_{qe}\right]$

În opinia lui Dornbusch [67], este util să partajăm λ într-o parte de varianță minimă și o parte speculativă. Partea de varianță minimă este definită ca partea din portofoliu care minimizează $\operatorname{var}\left(d\widetilde{W} / \widetilde{W}\right)$ fiind: $\lambda^m = \frac{\rho_{qe}}{\sigma_e^2}$.

iar partea speculativă reprezintă deviația de la varianța minimă din portofoliu, adică:

$$\lambda^s = \frac{1}{R\sigma_e^2}\left[i^* + \varepsilon - i - \rho_{qe}\right]$$

Partea de varianță minimă din portofoliu este independentă de aversiunea la risc a investitorilor și depinde doar de riscul relativ al celor două categorii de titluri. Mai mult, cum ambele categorii de titluri financiare au o oarecare rentabilitate funcție de moneda în care sunt emise, riscul relativ al celor două categorii de titluri finaciare depinde numai de variația cursului de schimb.

Investitorii cu aversiune la risc au în portofoliu doar părți speculative, diferite de zero, dacă sunt compensați pentru riscurile implicate, adică dacă primesc o primă de risc. Ecuația părții speculative din portofoliu arată ca prima de risc a unui investitor autohton pentru investiții în titluri străine și este egală cu $i^* + \varepsilon - i - \rho_{qe}$ și nu doar $i^* + \varepsilon - i$, așa cum s-a presupus deseori în analizele empirice[11]. Ultima valoare este numită primă de risc nominală și se folosește atunci când nu se iau în considerație efectele indicilor prețurilor de consum, în timp ce $i^* + \varepsilon - i - \rho_{qe}$ reprezintă prima de risc reală[12].

Investitorii străini au ca scop maximizarea funcție:

$$V^* = E\left(d\widetilde{W}^* / \widetilde{W}^*\right) - \frac{R^*}{2}\operatorname{var}\left(d\widetilde{W}^* / \widetilde{W}^*\right)$$

unde relația de mai sus și R^* reprezintă valoarea Arrow-Pratt a aversiunii relativă la risc, presupusă ca fiind constantă. Analog pe baza ecuației $\lambda = \frac{1}{R\sigma_e^2}\left[i^* + \varepsilon - i + (R-1)\rho_{qe}\right]$, se determină

[10] Problema portofoliului este tratată în acest situație ca problema unei singure perioade, dar este însă compatibil cu un model explicit inter-temporal dacă elasticitatea substituției este constransă la unitate (Giovannini și Jorion , 1988; Giovannini și Weil, 1989) sau dacă profiturile previzionate pentru viitor sunt interdependente de evenimentele din prezent (Fama ,1970)

[11] Pentru o analiză detaliată a se vedea (Levich ,1985 și Taylor , 1987).

[12] Importanța luării în considerație a relației dintre cursul de schimb și nivelul prețurilor de consum a fost analizată în literatura străină de specialitate de către Frenkel și Razin (1980) și Engle (1984).

alocarea optimă a portofoliului pentru investitorii străini, astfel: $\lambda^* = \frac{1}{R^* \sigma_e^2}\left[i + \varepsilon - i^* + \left(R^* - 1\right)\rho_{q^*e}\right]$ şiîmpărţind-o pe aceasta într-o parte de varianţă minimă şi o parte speculativă, obţinem:

$$\lambda^{*m} = \frac{-\rho_{q^*e}}{\sigma_e^2}$$

şi

$$\lambda^{*s} = \frac{i - \mu - i^* + \rho_{q^*e}}{R^* \sigma_e^2}$$

Este important să se analizeze modul în care se determină rata dobânzii pe piaţa internă şi de asemenea, este necesară analiza distribuţiei ratei dobânzii între titlurile exprimate în monede diferite.

Modelul descris poate fi interpretat în două moduri, şi anume:

- *Ca un model de echilibru „general” de forma “două-ţări” pentru determinarea ratei dobânzii*

Dacă se consideră o lume cu două ţări şi ne concentrăm atenţia pe alocările portofoliului în funcţie de un capital fix, atunci echilibrul în piaţa titlurilor de valoare, autohtonă şi străină, implică următoarele relaţiile :

$$S = \left(1 - \lambda\right)W + \lambda^* E W^*$$

$$S^* = \lambda \frac{W}{E} + \left(1 - \lambda^*\right)W^*$$

Constrângerea bugetară asupra agenţilor adică: $\begin{array}{l} \lambda W = EF \\ \left(1-\lambda\right)W = B \end{array}$ şi

$$\lambda^* W^* = \frac{1}{E} F^*$$

$$\left(1 - \lambda^*\right)W^* = B^*$$

determină relaţia: $S + S^* E = W + EW^*$

Aşadar, ecuaţiile $\begin{array}{l} S = \left(1 - \lambda\right)W + \lambda^* E W^* \\ S^* = \lambda \dfrac{W}{E} + \left(1 - \lambda^*\right)W^* \end{array}$ sunt redundante din moment ce modelul este capabil să determine numai rata relativă a dobânzii, adică diferenţa sau distribuţia între i *şi* i^*.

- *Ca un model de determinare a ratei dobânzii într-o economie mică şi deschisă*

În această situaţie se utilizează ipoteza unei economii mici, deschisă în ceea ce priveşte pieţele financiare, precum şi existenţa unor variabile străine independente de variabilele interne. Condiţiile din străinătate afectează economia, dar economia este prea mică pentru a avea o influenţă semnificativă asupra pieţelor externe. În consecință, nu este nevoie să considerăm piața titlurilor financiare străine şi i^* ca fiind exogene.[13]

5.3.3.1.1.Echilibrul în varianta investitorilor neutri la risc

În această situație se consideră cazul simplu, dar clasic, al investitorilor neutri față de risc (adică, $R = R^* = 0$), care presupune că aceştia dețin numai părți speculative în portofoliu. Prin prisma unui investitor autohton, partea de capital investită în titluri interne va fi:

$$1-\lambda = \begin{cases} \infty, i > i^* + \varepsilon - \rho_{qe} \\ -\infty, i < i^* + \varepsilon - \rho_{qe} \end{cases}$$

iar pentru un investitor străin:

$$\lambda^* = \begin{cases} \infty, i > i^* + \mu - \rho_{q^*e} \\ -\infty, i < i^* + \mu - \rho_{q^*e} \end{cases}$$

De aceea se va determina câte o strategie de investiții pentru ambele categorii de investitori. Condițiile care îi determină pe investitori să prefere active autohtone sau străine, sunt:
$i \le i^* + \varepsilon - \rho_{qe}$ *şi* $i \le i^* + \mu + \rho_{qe}$ deciziile privind portofoliul pot diferi între investitorii autohtoni sau străini, din două motive. Pot exista diferențe în previziunile referitoare la cursul de schimb măsurat în moneda corespunzătoare (adică, ε şi μ), sau pot fi diferențe în interacțiunea dintre prețurile de consum şi cursul de schimb (adică, ρ_{qe} şi ρ_{q^*e}). Aceste ecuații pot fi explicate prin observația că profitul real previzionat pentru un titlu de valoare depinde de profitul nominal previzionat şi de interacțiunea dintre prețurile de consum şi cursul de schimb.

În mod cert, ecuațiile $i \le i^* + \varepsilon - \rho_{qe}$ *şi* $i \le i^* + \mu + \rho_{qe}$ nu pot susține amândouă egalitatea şi apreciem că modelul, în general, nu are un echilibru bine definit.

Există totuşi, câteva cazuri speciale importante, în care deciziile investitorilor autohtoni şi străini sunt identice, adică, ecuațiile de mai sus devin echivalente: $\varepsilon - \rho_{qe} = \mu - \rho_{q^*e}$ şi condiția arbitrală care stabileşte relația dintre rata dobânzii internă şi externă este: $i = i^* + \varepsilon - \rho_{qe}$.

Folosind definițiile pentru μ, ρ_{qe} *şi* ρ_{q^*e}, obținem următoarele condiții suficiente pentru ecuația $\varepsilon - \rho_{qe} = \mu - \rho_{q^*e}$:

- investitorii au aceleaşi preferințe de consum, adică: $\alpha = \beta$ sau
- stabilireaparității puterii de cumpărare[14] (adică, $\rho_{pe} = \sigma_e^2 + \rho_{p^*e}$ sau $\rho_{ce} = 0$).

Problema unei condiții arbitrale bine definită este legată de

---

[13] Această interpretare cera ca unii investitori străini să investească numai în titluri financiare străine sau în titluri financiare din țări terțe.

[14] Considerăm paritatea puterii de cumpărare ca fiind rata reală C = EP* / P constantă, fără a analiza dacă acest fapt se datorează structurii economice similare sau existenței unor şocuri nominale.

paradoxul Siegel (Siegel ,1972) care, în esență, afirmă că două condiții arbitrale obtinuțe prin neluarea în calcul a fluctuațiilor de preț, adică $\begin{matrix} i = i^* + \varepsilon \\ i = i^* + \mu \end{matrix}$ nu se pot susține simultan, din moment ce $\mu = \varepsilon - \sigma_e^2$. Explicația este găsită în Teoria Inegalității a lui Jensen. Investitorii autohtoni sunt interesați de schimbările previzibile în *E*, în timp ce investitorii străini au avut în vedere schimbările previzibile în *1/E*, şi cele două nu sunt egale numeric decât dacă nu există nicio incertitudine. Paradoxul Siegel a fost deseori privit ca o curiozitate „de tehnică”[15], dar a nu lua în calcul faptul că în general cursul de schimb îi afectează asimetric pe investitorii autohtoni şi pe cei străini, este acelaşi lucru cu a nu lua în calcul fluctuațiile cursului de schimb (adică, $\sigma_e^2 = 0$). Aşa cum am văzut mai sus, există totuşi cazuri importante în care această asimetrie dispare.[16]

Se poate contraargumenta că în cazul comportamentului permis mai sus, şi anume în situația în care investitorii pot împrumuta sume infinite pentru a le investi în titluri de valoare, nu este o ipoteză fezabilă; deşi se poate previziona un câştig, există în mod egal şi un risc pozitiv ca cel ce se împrumută să dea faliment. Această situație este exclusă în cazul în care împrumutul nu este permis. În acest caz există un echilibru bine determinat.

Să presupunem, pentru argumentarea situației, că $\varepsilon - \rho_{qe} < \mu - \rho_{qe}$, caz în care cererea agregată pentru titlurile financiare autohtone se determină astfel:

$$D = \begin{matrix} 0,\ pentru \quad i < i^* + \varepsilon - \rho_{qe} \\ W\ pentru\ i^* + \varepsilon - \rho_{qe} \le i \le i^* + \mu - \rho_{q^*e} \\ W + EW^*\ pentru\ i \ge i^* + \mu - \rho_{q^*e} \end{matrix}$$

Rezultă că rata dobânzii pe piața internă se determină astfel:

$$i = \begin{cases} i^* + \varepsilon - \rho_{qe} & pentru\ S \le W \\ i^* + \mu - \rho_{q^*e} & pentru\ S > W \end{cases}$$

Se observă că rata dobânzii pe piața internă depinde de existența statutului de debitor-net (S>W) sau creditor-net (S<W) în raport cu restul lumii. O logică similară se aplică dacă: $\varepsilon - \rho_{qe} < \mu - \rho_{qe}$.

Trebuie menționat că există o regulă generală conform căreia o creştere a ratei dobânzii străine atrage o creştere a ratei dobânzii autohtone, iar în situația în care se măreşte deprecierea previzionată a monedei autohtone (adică, ε şi μ cresc), atunci va creşte şi rata dobânzii autohtone.

Prin urmare, constrângerea generată de împrumut oferă o soluție

[15] Pentru contraargumente se pot consulta următoarele materiale din literatura de specialitate la (McCulloch -1975, Siebert-1989 sau Sinn - 1989).

[16] Adler şi Dumas (1983) consideră că paradoxul Siegel apare din cauză că nu se ia în considerație efectul cursului de schimb asupra indicilor de preț. Analiza celor doi autori porneşte de la ipoteza efectivă că investitorii sunt interesați doar de maximizarea ratei reale a profitului exprimată în orice monedă.

pentru paradoxul Siegel, în sensul că numai una din diferitele condiții arbitrale se susține.[17] Deci nu există un paradox, dar putem avea chiar echilibru în cazul în care investitorii de o anumită naționalitate găsesc atractive titlurile de valoare autohtone. În concluzie, chiar şi în cazul agenților cu comportament neutru față de risc, sunt de aşteptat devieri de la condiția neacoperirii parității ratei dobânzii.

5.3.3.1.2.Echilibrul în varianta investitorilor cu aversiune față de risc

Deşi deviațiile de la neacoperirea parității ratei dobânzii apar în cazul investitorilor neutri față de risc, această abordare nu pare a explica integral deviațiile observante în prezent[18]. Din acest motiv în această parte a tezei vom evidenția relația de calculu a ratei dobânzii în cazul investitorilor cu aversiune față de risc.
Condiția echilibrului pentru piața autohtonă a titlurilor de valoare este:

$$S\text{-}W=\frac{[i-\varepsilon-i^{*}-(R-1)\,\rho_{qe}]}{R\sigma_e^2}W+$$
$$\frac{[i-\mu-i^{*}-(R^{*}-1)\,\rho_{q^{*}e}]}{R^{*}\sigma_e^2}EW^{*}$$

Relația de mai sus este relativ complicată şi există destul de puține rezultate statice comparate care să poată fi determinate cert şi fără ambiguități.
O creştere a stocului de titluri de valoare autohtone atrage o creştere a ratei dobânzii $\frac{\partial i}{\partial S}>0$
O creştere a ratei dobânzii externe va determina o creştere a ratei dobânzii autohtone, adică: $\frac{\partial i}{\partial i^{*}}=1$.

O creştere a lui i^{*} atrage scăderea cererii de titluri financiare autohtone şi prin urmare, *i* trebuie să crească şi el, pentru a se restabili echilibrul, iar schimbarea va fi întotdeauna proporțională, aşa cum o rată diferită a dobânzii va afecta alocările portofoliului.
O problemă deosebită se referă la modul în care competitivatea țării influențează ratele dobânzii. Aşa cum am arătat în expunerea teoretică de mai sus modificările previzibile ale prețurilor autohtone şi externe (π *şi* π^{*}) nu influențează calculul ratei dobânzii. Totuşi, modificările previzionate ale cursului de schimb influențează rata dobânzii, din moment ce afectează profitul nominal ce poate fi obținut per portofoliu. În particular, se poate observa că o creştere a deprecierii previzionate a monedei autohtone conduce la o rată a

[17] Aceasta explică foarte clar de ce este posibil ca menținerea fixă a ratei dobânzii externe şi interne poate genera un paradox (Sinn , 1989).
[18] Frenkel şi Razin, *„Stochastic Prices and Tests of Efficiency of Foreign Exchange Markets",*Economics Letters, Vol. 6, No.2, 1980, pg. 165-170

dobânzii mai mare, adică: $\frac{\partial i}{\partial \mu} > 0$ ($\partial\varepsilon / \partial\mu = 1$ reprezintă principiul *ceteris paribus*.) Acest lucru se datorează faptului că pentru investitori este mai puțin atractiv să investească în titluri de valoare exprimate într-o monedă a cărei valoare se previzionează a scădea; schimbările altor variabile exogene au în general un efect ambiguu;
În scopul unei mai bune înțelegeri a mecanismului implicat vom analiza câteva ***cazuri speciale***:

- *Egalitatea investitorilor de naționalități diferite*

În general, prețul şi cursul de schimb au o influență diferită asupra profitului real ce poate fi obținut prin cele două categorii de titluri, din punctul de vedere al investitorilor autohtoni şi străini. Prezintă un interes deosebit analiza condițiilor care determină ca profitul real al titlurilor să fie acelaşi pentru investitorii de naționalități diferite[19]. În acest caz, investitorii străini şi cei autohtoni vor investi aceeaşi parte a activelor lor în moneda autohtonă, adică: $\lambda^* = 1 - \lambda$.
Aceasta înseamnă că investitorii indiferent de naționalitate susțin portofoliul pieții internaționale
(adică $\lambda^* = 1 - \lambda = S/\left(W + EW^*\right)$), ceea ce poate fi considerată ca o extensie a modelului CAPM a lui Sharpe-Lintner în domeniul proprietății asupra portofoliului pe piața finanțelor internaționale.
Prin ecuația:

$$\text{S-W} = \frac{[i - \varepsilon - i^* - (R-1)\,\rho_{qe}]}{R\sigma_e^2}\text{W} + \frac{[i - \mu - i^* - (R^* - 1)\,\rho_{q^*e}]}{R^*\sigma_e^2}EW^*$$

că ecuația $\lambda^* = 1 - \lambda$ se susține dacă sunt îndeplinite următoarele seturi alternative de condiții suficiente:

1) investitorii au aceeaşi atitudine față de risc ($R = R^*$) şi aceeaşi constrângere a consumului ($\alpha = \beta$)[20] sau

2) investitorii au o funcție de utilitate logaritmică ($R = R^* = 1$)[21] sau

3) investitorii au aceeaşi atitudine față de risc ($R = R^*$), situație în care se susține condiția parității puterii de cumparare ($\rho_{qe} = \sigma_e^2 + \rho_{p^*e}$ sau $\rho_{ce} = 0$).

În cazurile (1) şi (3), investitorii străini şi autohtoni au aceeaşi varianță mimină de portofolii, precum şi portofolii speculative identice. În cazul (2), diferențele de varianță mimină a portofoliilor sunt egale cu diferențele de portofolii speculative, de unde rezultă că investitorii străini şi autohtoni dețin acelaşi portofoliu.

[19] Adică, nediscriminarea investitorilor din punct de vedere național, observată, de exemplu de Adler şi Dumas, (1983).
[20] Acest caz a fost analizat în literatura de specialitate de Grauer, Litzenberger şi Stehle (1976) şi Frankel (1979)
[21] Adler, M. şi Dumas, B., *„International Prtfolio Choice and Corporation Finance: A Synthesis”*, Journal of Finance, Vol. 12, No.3, 1983, pg. 952-984

Cazul (3) este, probabil, cel mai interesant, din moment ce paritatea puterii de cumpărare joacă un rol important în literatura economică internaţională şi poate fi considerat ca o condiţie a echilibrului pe termen lung pentru pieţele de mărfuri. Rezultatul obţinut aici generalizează un rezultat raportat de Fama şi Farber[22], şi anume: „paritatea puterii de cumpărare şi pieţele internaţionale de capital lipsite de conflicte reprezintă condiţii suficiente pentru ca profitul real provenit dintr-un anume titlu de valoare, să fie acelaşi pentru rezidenţii tuturor ţărilor". Acest rezultat nu este extrem de corect, deoarece sunt necesare atitudini identice faţă de risc, agenţii fiind de acord doar cu privire la preţul riscului dacă au aceeaşi atitudine faţă de risc.

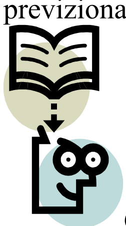
[22] Fama, E. F., Farber, A., *„Money, Bonds and Foreign Exchange"*, American Economic Review, Vol. 69, No. 4,1979, pg. 646

Unitatea de învăţare 6

Metode multicriteriale pentru fundamentarea deciziei de investiţii în condiţii de certitudine

6.1. Introducere

Fundamentarea deciziei de investiţii în mediul cert are mai mult un caracter teoretic, utilizându-se calculul actuarial pentru înţelegerea instrumentelor esenţiale care ajută la analiza proiectelor de investiţie.
Realizarea unui proiect de investiţii are implicaţii majore asupra evoluţiei viitoare a unei întreprinderi. Datorită incertitudinii, evaluarea proiectului de investiţii poate deveni extrem de complexă. Incertitudinea asupra evoluţiei viitoare a economiei, a unei afaceri sau investiţii determină existenţa riscului ca fluxurile financiare viitoare să fie variabile, cu valori diferite de cele previzionate cu certitudine în cadrul unui mediu determinist.



6.2. Obiectivele şi competenţele unităţii de învăţare

Obiectivele unităţii de învăţare:
– cunoaşterea metodelor si tehnicilor de fundamentare a deciziei de investiţii în condiţii de certitudine;
– cunoaşterea metodelor de modelare în condiţii de certitudine.

Competenţele unităţii de învăţare:
– studenţii vor putea să utilizeze în mod adecvat metodele şi tehnicile specific de fundamnetare a deciziei de investiţii în condiţii de certitudine;
– studenţii vor putea să interpreteze în mod adecvat rezultatele analizei.

6.3.Conţinutul unităţii de învăţare

6.3.1.Metode de rezolvare a problemelor decizionale

În categoria metodelor de rezolvare a problemelor decizionale cu mai multe funcţii obiectiv întâlnim:
- metoda programării scop;

- metoda bazată pe teoria mulţimilor vagi.

6.3.1.1. Metoda programării scop

Utilizând notaţiile de mai jos:
y_j - fondul de investiţii alocat produsului j, secţiei j, sau firmei j, j = 1, 2,......,n ;
z- numărul de criterii de decizie (scopuri) luate în considerare pentru procesul decizional ;
C_{jv} - coeficientul lui y_j în funcţia obiectiv formulată pentru scopul v, $v = 1,\ldots\ldots, z$ reprezentând efectul obţinut la 1 u.m. fond de investiţii;
Q_n - scopul (nivelul de aspiraţie) propus pentru funcţia obiectiv $Q_n = 1,\ldots\ldots, z$;
a_{ij} - coeficientul lui y_j în restricţia "i" reprezentând consumul resurselor la 1 u.m. capital fix la 1 u.m. investită pentru produsul j, secţia j, firma j;
b_i - nivelul maxim disponibil din resursa i, i = 1,.......,m;

d_v^+ - $\sum_{j=1}^{n} C_{jv} Y_j - Q_v \geq 0$ - abaterea în plus a valorii funcţiei obieciv faţă de nivelul de aspiraţie precizat pentru scopul v.

d_v^- - Q_v - $\sum_{j=1}^{n} C_{jv} Y_j \geq 0$ - abaterea în minus a valorii funcţiei obieciv faţă de nivelul de aspiraţie precizat pentru scopul v.

Se constată că pentru acelaşi scop v are loc relaţia d_v^+ întrucât la un anumit nivel de insipraţie precizat pentru scopul α, variabilele de decizie pot determina la un moment dat fie o abatere în plus fie o abordare în minus, fie $d_v^+ = d_v^- = 0$.

Funcţia obiectiv a modelului de programare conduce la minimizarea abaterilor faţă de scopurile propuse.

O situaţie deosebită, legată de formularea funcţiei obiectiv a modelului de programare scop, o constituie coeficienţii variabilelor d_0 din această funcţie, putând exista următoarele situaţii:

- scopurile (nivelurile de asipraţie) sunt exprimate în unităţi de mărimi diferite;
- toate scopurile sunt exprimate în aceeaşi unitate de măsură, fiecare situaţie are avantajele şi dezavantajele ei, depinde de tipul investiţiei.

6.3.1.2. Metoda bazată pe teoria mulţimilor vagi

Ideea de mulţime fuzzy (mulţime vagă) a fost introdusă în matematica şi teoria sistemelor de către L. Zadeh în anii '60. Mulţimile fuzzy şi, în general, conceptele fuzzy au apărut ca o necesitate de a măsura cantitativ vagul, imprecizia. În comparatie cu mulţimea convenţională la care apartenenţa sau neapartenenţa unui element la ea se exclud reciproc, în cazul mulţimilor fuzzy un element poate avea o apartenenţă parţială exprimată prin gradul său de apartenenţă.

În consecință, un anumit element poate să se găsească în trei ipostaze în raport cu o mulțime fuzzy: să nu aparțină mulțimii, caz în care gradul său de apartenență este 0; să aparțină mulțimii în totalitate, caz în care gradul său de apartenență este 1; să aparțină mulțimii parțial, caz în care gardul său de apartenență este mai mare ca 0, dar mai mic decât 1.
Dacă gradul de apartenență este o noțiune asociată elementului mulțimii, apartenența elementelor la mulțimea fuzzy este exprimată global printr-o funcție numită funcție de apartenență, definită pe mulțimea convențională a tuturor elementelor considerate şi cu valori în intervalul [0,1]. Această funcție corespunde funcției caracteristice a unei mulțimi convenționale care însă are valorile în mulțimea $\{0,1\}$. Funcția de apartenență se asociază mulțimii fuzzy şi nu elementului. Gradul de apartenență al unui element la mulțimea fuzzy reprezintă valoarea funcției de apartenență pentru elementul respectiv.
Necesitatea de a optimiza apare aşadar şi atunci când problema este dată imprecis. Imprecizia se datorează pe de o parte complexității profilului economic analizat, cât şi imposibilității de a se specifica clar granițele de domeniu sau mulțimi (exemple de mulțimi considerate: mulțimea întreprinderilor mari, mulțimea utilajelor ieftine, mulțimea utilajelor cu productivitate mare etc.).
Mulțimea vagă sau fuzzy, este astfel definită încât un element poate nu numai să îi aparțină sau să nu îi aparțină, ci să se caracterizeze şi prin apartenență intermediară.
Fie notațiile: E – mulțimea tuturor elementelor ; A = 0 mulțime vagă inclusă în E şi X un element E $X \in E$ în general; o mulțime vagă $A \subset E$ este caracterizată atât prin mulțimea elementelor sale X, cât şi prin funcțiile lor de apartenență $\mu_A(x)$; N_j - nivelul de aspirație; θ_j - abaterea permisă.
Aceste funcții pun în concordanță fiecare element $X \in E$ cu un număr real din intervalul $[0;1]$. Acest număr indică gradul de apartenență al elementului X la mulțimea vagă A.
Aşadar, o mulțime vagă $A \subset E$ este definită cu ajutorul perechilor ($X, \mu_A(x)$, unde: $X \in E$, şi $\mu_A(x) : E[0;1]$.

TEME DE CONTROL

1. O bancă acordă clientilor săi patru tipuri de credite care aduc annual următoarele dobâzi:

- Credite ipotecare initiale: 14%
- Credite ipotecare secundare: 20%
- Credite pentru îmbunătătiri ale locuintelor: 20%
- Credite pentru acoperirea depăsirilor de disponibil în cont: 10%

Banca are o capacitate de creditare estimată la 250.000.000 u.m. si îsi propune să facă fată următoarelor elemente de politică vis-à-vis de clienti:

- Creditele ipotecare initiale trebuie să fie de cel putin 55% din totalul creditelor ipotecare acordate si cel putin 25% din totalul creditelor acordate
- Creditele ipotecare secundare nu pot depăsi 25% din totalul creditelor acordate
- Pentru a evita disconfortul clientilor si/sau introducerea unor taxe neasteptate pe parcursul derulării creditelor, dobânda medie pentru toate creditele acordate trebuie să nu depăsească 15%

Cu toate că aceste măsuri limitează profitul pe care banca l-ar putea avea, ele au menirea de a proteja banca fată de riscurile excesive pe care un aspect particular le-ar putea crea. De aceea, interesul băncii este să maximizeze veniturile din dobânzile pretinse la credite, în conditiile
respectării politicii de creditare enuntate mai sus.

Indicație: Si în cazul acestei probleme trebuie definite variabilele de decizie, restrictiile si functia obiectiv. Variabilele xi (i = 1, 2, 3, 4) sunt sumele pe care banca le va acorda pe cele patru categorii de credite, în ordinea din enunt. Valorile acestora nu pot fi negative, asadar xi ≥ 0 (i = 1, 2, 3, 4). Restrictiile vin din:

- Suma totală a creditelor x1 + x2 + x3 + x4 ≤ 250
- Conditia primă din politica băncii
  x1 ≥ 0,55(x1 + x2)
  x1 ≥ 0,25(x1 + x2 + x3 + x4)
- Conditia a doua din politica băncii x2 ≤ 0,25(x1 + x2 + x3 + x4)
- Conditia a treia din politica băncii

0,14x1 + 0,20x2 + 0,20x3 + 0,10x4 ≤ 0,15(x1 + x2 + x3 + x4)

Functia obiectiv exprimă venitul total din dobânzi 0,14x1 + 0,20x2 + 0,20x3 + 0,10x4 care trebuie maximizat.

2. În vederea reutilării cu utilaje performante, consiliul de administraţie al unei unităţi economice dispune de suma de 240.000 lei şi are de ales două tipuri de linii de maşini pentru prelucrarea materiilor prime, A şi B. Pentru montarea lor sunt necesari 100 de specialişti de o anumită calificare şi 50 specialişti de o altă calificare. Montarea unei maşini de tipul A necesită 20.000 lei şi 10 specialişti din prima calificare şi un specialist din a doua calificare, iar pentru maşinile de tipul B sunt necesari 30.000 lei, un specialist din prima categorie şi 10 specialişti din a doua categorie. Cunoscând că, maşina de tipul B aduce o economie de 1,5 ori cât una de tipul A, să se determine numărul de maşini de fiecare tip ce se pot comanda, astfel încât economiile pe care le vor aduce să fie cât mai mari.

3. O firmă realizează un produs în două variante standard şi de lux. Procesul de fabricație constă în execuția a patru operații succesive. Timpul de execuție pe unitatea de produs (în ore) apare în tabelul:

Produsul	O_1	O_2	O_3	O_4
Standard	0.6	0.5	1.1	0.1
De lux	1.0	0.8	0.7	0.25

Profitul unitar obținut este de 10 u.m. în cazul variantei standard şi de 9 u.m. pentru varianta de lux. Timpul disponibil estimat pentru fiecare operație este: 01-650 ore, 02-700 ore, 03-750 ore şi 04-200 ore. Să se determine programul optim de fabricație care trebuie executat astfel încât profilul total obținut să fie maxim. Verificați elementele de analiză a senzitivități efectuând modificarea: profitul unitar pentru produsul standard devine 14 u.m.

4. O firmă realizează un produs în 3 modele. Se cunosc timpii necesari operațiilor (în minute), beneficiile realizate pe fiecare unitate de model, timpii disponibili pentru fiecare operație (în ore).

Modelul	O1	O2	O3	O4	O5	Profit
M1	20	19	25	18	30	10
M2	21	20	30	14	25	9
M3	22	14	24	27	22	11
Disponibil	100	80	70	90	100	

Cererea impune ca M2 să reprezinte cel puțin 30% din producție, iar M3 cel mult 20% din producție. Să se determine programul optim de fabricație. Să se analizeze soluția rezultată.

5. O firmă dispune de fonduri bănești (K=7000 u.m.) și forța de muncă (L=1500 om-zile) pentru realizarea a 250 unități dintr-un anumit produs. Există posibilitatea de a realiza produsul în 4 variante. Cheltuielile bănești, forța de muncă și beneficiile nete pentru o unitate din fiecare variantă sunt:

Variante	V1	V2	V3	V4
Capital (K)	34	32	20	17
Forța de muncă (L)	7	4	3	4
Beneficiul net	24	14	9	8

Să se determine un plan optim de fabricație, după criteriul beneficiului total maxim. Se vor analiza situațiile: a) planul de fabricație ≤ 250; b) planul de fabricație = 250.

6. Patru feluri de substanțe S1, S2, S3, S4 conțin în cantități diferite, patru elemente E1, E2, E3, E4. Din cele 4 substanțe trebuie facut un amestec, care să conțină cel puțin 40, 42, 22 și 25 unități, respectiv din cele 4 elemente. Câte o unitate din fiecare substanță S1, S2, S3, S4 costă respectiv 6, 4, 5 și 4 u.m. Conținutul unei unități din fiecare substanță, în fiecare din cele patru elemente este:

	S1	S2	S3	S4
E1	3	2	1	3
E2	4	0	3	1
E3	0	3	0	4
E4	5	0	3	1

Conținutul substanțelor S1 și S2 în alte elemente, ce aduc amestecului proprietăți speciale, cer ca acest amestec să conțină cel puțin 3 unități din S1 și cel puțin 2 unități din S2.
Să se determine cantitățiile ce trebuie amestecate din cele 4 substanțe, astfel încât să fie îndeplinite toate condițiile impuse iar costul total al amestecului să fie minim.

7. Se presupune că direcția de planificare din cadrul administrației locale a unei regiuni își propune să fundamenteze, în vederea implementării, două proiecte de investiții, fiecare proiect având costuri unitare diferite față de ale celuilalt. Dimensiunile acestor proiecte trebuie combinate astfel încât costurile totale ale ambelor proiecte, luate împreună, să fie minime. Fiecare proiect necesită două categorii de resurse de forță de muncă (de exemplu, forța de muncă calificată și forța de muncă necalificată). Suplimentar, se introduce cerința ca pentru fiecare din cele două proiecte să se asigure cel puțin un nivel dat al ocupării forței de muncă. Cu aceste două condiții secundare, direcția de planificare trebuie să determine combinația optimă de cheltuieli pentru cele două proiecte.
Datele disponibile sunt: i) pentru realizarea unei unități din primul proiect sunt necesare o persoană calificată și patru persoane necalificate, în timp ce pentru realizarea unei unități din cel de-al doilea proiect sunt necesare două persoane calificate și trei necalificate; ii) costurile unitare ale proiectelor sunt egale cu 4, respectiv 6 u.m.; iii) nivelul minim de ocupare cerut pentru forța de muncă calificată

este de 4 persoane, iar pentru forța de muncă necalificată de 10 persoane. În plus se cer: determinarea soluției problemei duale; interpretarea soluției.

8. O întreprindere de comerț exterior din țara noastră trebuie să încheie contracte pentru livrarea de produse textile – imprimeuri – către o firmă din altă țară. Contractele sunt incheiate la începutul anului şi prevăd livrarea a patru sortimente de țesături, fiecare beneficiar impunând ca în cadrul livrărilor ulterioare să se asigure din fiecare sortiment un minim de cantitate dat în tabel. Întreprinderea de comerț exterior, încheie la rândul său contracte cu trei furnizori interni care livrează mărfuri cu respectarea coloristicii dar în cantități diferite din fiecare sortiment coloristic şi cu prețuri de cost diferite (la fiecare furnizor). Problema care se pune este de a afla modul în care se vor face contractele cu cei trei furnizori din țară spre a se respecta intocmai sortimentația cerută la export şi a se realiza în acelaşi timp cele mai mici costuri de achiziție la intern (în vederea maximizării beneficiilor la întreprinderea de comerț exterior).

Datele problemei sunt redate în tabelul următor:

	În vederea optimizării producției proprii, fabricile produc loturi care conțin următoarele sortimente coloristice (m2/lot)			Lotul ce se expediază lunar va trebui să minim… m^2 de sortimente coloristice (condiție impusă de partenerul străin)
	Fabrica A	**Fabrica B**	**Fabrica C**	
Roşu	3	12	2	**100**
Galben	8	6	1	**250**
Albastru	2	1	12	**180**
Verde	5	4	9	**150**
Costul unui lot întreg	**1800**	**1600**	**1650**	

BIBLIOGRAFIE

1. Abel, A.B., Avinash, K., Dixit, J., Eberly, C., Pindyck, R.S, *„Options, the Value of Capital and Investment"*, Quarterly Journal of Economics , Vol.111, Nr. 3 ,753-778, 1996
2. Bădescu, A.V., Dobre, I., *„Modelarea deciziilor economico-financiare",* Editura Conphys, Râmnicu-Vâlcea, 2001
3. Caracota Dimitriu, M., Savu Blessy, M., *„Analyzing economic growth and development through technical progress and efficiency"*, Editura ASE, Bucureşti, 2009
4. Dasgupta, S., Sengupta, K., *„Financial Constraints, Investment and Capital Structure: Implications from a Multi-Period Model"*, Working paper, University of Sydney, 2002
5. Despa, R., Zirra, D., Avrigeanu, A., Munteanu, A., Nedelescu, M., *„Eficiența investițiilor",* Editura Universitară, Bucureşti, 2010
6. Ghic, G., *„Matematici aplicate în economie"*, Editura Universitară, Bucureşti, 2011
7. Ghic, G., Grigorescu, C.J., *„Analiză economico-financiară. Repere teoretice şi practice"*, Editura Universitară, Bucureşti, 2011
8. Grigorescu, C.J, *"Modelarea deciziei de investiții la nivel microeconomic"*, Editura Pro Universitaria, Bucureşti, 2011
9. Grigorescu, C.J, *„Politicile investiționale în contextul dezvoltării durabile", Revista Orizonturi ale cunoaşterii, nr. 3, 2011*
10. Hartulari, C., Dobre, I., *„Sisteme suport pentru decizii",* Editura ASE, Bucureşti, 2009
11. Magni, C.A., *„Reasoning the 'Net–Present–Value' Way: Biases and How Psichology May Be Used for Falsifying Decision Models",*MPRA Paper No. 2064, 2005
12. Oprescu, Gh., „Macroeconomie avansată*",* Editura ASE, Bucureşti, 2010
13. Păun, M., Hartulari, C., *„Analiza, diagnoza şi evaluarea sistemelor din economie",* Editura ASE, Bucureşti, 2004
14. Pârvu, D., *„Eficiența investițiilor",* Editura Sylvi, Bucureşti, 2001